Rattrapage de Probabilités et Statistiques

Durée 1h30

Les documents et les téléphones portables sont interdits.
Les calculatrices type collège sont autorisées.
Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (7 points)

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Énoncer le Théorème de la limite centrale.
2. Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X définie par
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ e^{2(1-x)} & \text{si } x \in [1, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Vérifier que f_X définit bien une densité de probabilité et calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(|X|)$ et $\mathbb{P}(X < 0)$.
3. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$ et $\mathbb{P}(A|B) = 0.25$.
Calculer $\mathbb{P}(B|A)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? (Justifier.)
4. Soit S une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. Montrer que pour tout $t > 0$ on a
$$\mathbb{P}(|S - np| > t) \leq \frac{np(1-p)}{t^2}.$$
5. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{E}(t^X)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 2 (6 points)

Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte. Quand un joueur mise sur une couleur (rouge ou noire), si cette couleur sort, alors il récupère sa mise plus un gain égal à sa mise, sinon il perd sa mise (auquel cas son gain est considéré négatif). Quand un joueur mise sur un numéro de 1 à 36, si ce numéro sort, alors il récupère sa mise plus un gain égal à 35 fois sa mise, sinon il perd sa mise.

Un premier joueur mise 1 euro sur la couleur rouge. Un second joueur mise 1 euro sur le numéro 7, dont la case correspondante sur la roulette est rouge.

1. Quelle est la probabilité que les deux joueurs perdent ?
2. Soit C la variable aléatoire représentant le gain du premier joueur. Déterminer la loi de C puis calculer son espérance.

Indication : Le gain peut être ici négatif. Si le premier joueur gagne, $C = 1$, si il perd $C = -1$.

3. Soit N la variable aléatoire représentant le gain du second joueur. Déterminer la loi de N puis calculer son espérance.
4. Donner $\mathbb{P}(C = 1, N = 35)$ et $\mathbb{P}(C = 1, N = -1)$.
5. Les variables C et N sont-elles indépendantes ? (Justifier.)

Exercice 3 (7 points)

Une compagnie aérienne a demandé des statistiques afin d'améliorer la sûreté au décollage. On admet que le poids d'un passager est modélisé par une variable aléatoire X de loi normale de moyenne inconnue m_1 et d'écart-type $\sigma_1 = 8$ kg, et que les poids des différents passagers sont indépendantes entre eux. Pour estimer le poids moyen m_1 des passagers, on s'intéresse à la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ des poids $X_1, ..., X_n$ de n passagers choisis au hasard.

1. Quelle loi suit $\bar{X}_n$? (Justifier.)
2. Sur un échantillon de $n = 300$ passagers qui ont accepté d'être pesés, on obtient une moyenne $\bar{x}_n = 68$ kg. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour le poids moyen m_1 des passagers. (Justifier la construction de l'intervalle.)
3. On considère dans la suite que le poids moyen des passagers est $m_1 = 70$ kg. On modélise aussi le poids des bagages d'un passager par une variable aléatoire Y de loi normale de moyenne $m_2 = 15$ kg et d'écart-type $\sigma_2 = 5$ kg. On suppose aussi que le poids d'un passager est indépendant du poids de ses bagages.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y > 20)$.
   (b) Soit T le poids total d'un passager avec ses bagages. Quelle loi suit T ? (Justifier.)
   (c) Supposant qu'il y ait 300 passagers dans l'avion, quelle est la loi du poids total des passagers avec leurs bagages ?
   (d) Le décollage est interdit si le poids total de l'avion dépasse 276200 kg. L'avion pèse, à vide, 250000 kg. Quelle est la probabilité pour que le décollage soit interdit ?

Indication : Quelques valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$F_Z(1) = 0.841; \quad F_Z(1.96) = 0.975; \quad F_Z(4.284) = 0.999991.$$