Correction CC2 de Probabilités et Statistiques

IC3, 2011–2012

Exc. 1 On a $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(V) = 0,5$.

1) On a $\mathbb{P}(A_i | U) = 0,1$; $\mathbb{P}(A_i|V) = 0,3$, $\forall\, i$

$\mathbb{P}(A_1 \cap V) = \mathbb{P}(A_1|V)\,\mathbb{P}(V) = 0,3 \times 0,5 = \underline{0,15}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | U) = \mathbb{P}(A_1|U) \times \mathbb{P}(A_2|U)$ car le mode de fonctionnement des tableaux est indép., pour les tableaux fabriqués par U

(A_1 et A_2 sont des évén. indépendants sachant U)

donc $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | U) = (0,1)^2$.

2) $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap U) + \mathbb{P}(A_1 \cap V)$, car $\{U, V\}$ partition de Ω

$= \mathbb{P}(A_1|U)\,\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(A_1|V)\,\mathbb{P}(V)$ (formule des probas totales)

$= 0,1 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5$

$= 0,4 \times 0,5 = \boxed{0,2}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | U)\,\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | V)\,\mathbb{P}(V)$

$= (0,1)^2 \times 0,5 + (0,3)^2 \times 0,5 = 0,1 \times 0,5 = \boxed{0,05}$

3) $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 0,2 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) = 0,04$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \Rightarrow A_1$ et A_2 <u>ne sont pas indépendants</u>.

4) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n | U) \times \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n | V)\,\mathbb{P}(V)$

car évén. indép. conditionnellement à U ou à V

$= \mathbb{P}(A_1|U) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n|U) \times \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(A_1|V) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n|V)\,\mathbb{P}(V)$

$= (0,1)^n \times 0,5 + (0,3)^n \times 0,5 = \dfrac{1+3^n}{2 \times 10^n}$.

5) $\mathbb{P}(A_{n+1} | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)} = \dfrac{1+3^{n+1}}{2 \times 10^{n+1}} \times \dfrac{2 \times 10^n}{1+3^n}$

$= \boxed{\dfrac{1+3^{n+1}}{10(1+3^n)}}$

6) $\mathbb{P}(U | A_1 \cap \dots \cap A_n) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n | U)\,\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)}$

formule de Bayes

$= \dfrac{(0,1)^n \times 0,5}{\dfrac{1+3^n}{2 \times 10^n}} = \boxed{\dfrac{1}{1+3^n}}$.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ $X \sim \mathcal{E}xpo(1)$, $Y = \exp\left(\frac{X}{2}\right)$. La densité de X est $f_X(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$.

1) On a $X \geq 0$ car de loi $\mathcal{E}xpo$, donc $Y \geq 1$.

2) $$\mathbb{P}(Y > 20) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{X}{2}\right) > 20\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{2} > \ln(20)\right)$$
$$= \mathbb{P}(X > 2\ln(20)) = \int_{2\ln(20)}^{\infty} e^{-x}\,dx =$$
$$= e^{-2\ln(20)} = \frac{1}{400} = \underline{0{,}0025}.$$

3) $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{X}{2}\right) \leq y\right)$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{si } y < 1 \\ \mathbb{P}(X \leq 2\ln(y)) = \int_0^{2\ln(y)} e^{-x}\,dx = 1 - e^{-2\ln(y)} \\ \quad = 1 - \frac{1}{y^2}, & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

4) $$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^3}, & \text{si } y \geq 1. \\ 0, & \text{si } y < 1 \end{cases}$$

5) $$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int_1^{\infty} y \cdot \frac{2}{y^3}\,dy = \int_1^{\infty} \frac{2}{y^2}\,dy$$
$$= \left[-\frac{2}{y}\right]_1^{\infty} = \boxed{2} \text{ min.}$$

6) $$\mathbb{P}(Y > 20 \mid Y > 10) = \frac{\mathbb{P}(\{Y > 20\} \cap \{Y > 10\})}{\mathbb{P}(Y > 10)} = \frac{\mathbb{P}(Y > 20)}{\mathbb{P}(Y > 10)}$$
$$= \frac{\frac{1}{400}}{\frac{1}{100}} = \frac{1}{4} = \boxed{0{,}25}.$$

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1-p$

1) $\mathbb{E}(X_1) = 1 \cdot p + (-1)\cdot(1-p) = \underline{2p-1}.$

$\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \underset{\text{car } X_i^2 = 1}{=} 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2 = \underline{4p(1-p)}.$

2) $\hat{p}_n = \dfrac{\overline{X}_n + 1}{2}$; $\mathbb{E}(\hat{p}_n) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{E}(\overline{X}_n) + 1\right) \underset{\text{car } \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1)}{=} \dfrac{1}{2}\left((2p-1)+1\right) = \underline{p}.$

$\mathrm{Var}(\hat{p}_n) = \dfrac{1}{4} \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\mathrm{Var}(X_1)}{n} = \underbrace{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

3) $\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| > c) = \mathbb{P}(|\hat{p}_n - \mathbb{E}(\hat{p}_n)| > c) \underset{\text{inégalité de Chebychev}}{\leq} \dfrac{\mathrm{Var}(\hat{p}_n)}{c^2} = \dfrac{p(1-p)}{nc^2}.$

4) $\mathbb{E}(\hat{p}_n) = p \Rightarrow \hat{p}_n$ est un estimateur <u>sans biais</u> de p.
De la question 3) on déduit que $\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| > c) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall c > 0$
donc $\hat{p}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p$. L'estimateur $\hat{p}_n$ est donc <u>consistant</u>.

5) $\boxed{\text{TLC}}$: Si $X_1, \dots, X_n, \dots$ sont des variables aléat. indép. et de même loi admettant une variance, alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{où } \begin{array}{l} m = \mathbb{E}(X_1) \\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1). \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \underset{n \text{ grand}}{\overset{\text{loi}}{\approx}} \mathcal{N}(0,1).$$

$$\Rightarrow \overline{X}_n \underset{n \text{ grand}}{\overset{\text{loi}}{\approx}} \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \hat{p}_n \underset{n \text{ grand}}{\overset{\text{loi}}{\approx}} \mathcal{N}\Big(\underset{\mathbb{E}(\hat{p}_n)}{p}, \underbrace{\frac{p(1-p)}{n}}_{\mathrm{Var}(\hat{p}_n)}\Big).$$

6) On renormalise la loi $\mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ et on obtient

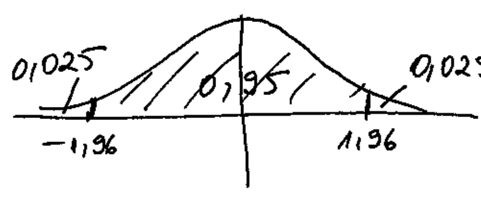
$$\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \underset{n \text{ grand}}{\overset{\text{loi}}{\approx}} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{donc } D_n \underset{n \text{ grand}}{\overset{\text{loi}}{\approx}} \mathcal{N}(0,1).$$

7) On a $\mathbb{P}(-1{,}96 \leq D_n \leq 1{,}96) \underset{n \text{ grand}}{\approx} \mathbb{P}(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

car $F_Z(1{,}96) = 0{,}975$ et

$F_Z(a) = \mathbb{P}(-a < Z < a) + \mathbb{P}(Z < -a)$

$\overset{\text{par sym.}}{=} \mathbb{P}(-a < Z < a) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(|Z| > a).$



On obtient

$$\mathbb{P}\left(-1,96 \leq (\hat{p}_n - p) \cdot \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \leq 1,96 \right) \underset{n \text{ grand}}{\approx} 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\hat{p}_n - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p}_n + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \approx 0,95$$

les bornes dépendent du paramètre inconnu p

- On utilise le fait que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, $\forall\, p \in]0,1[$

et on obtient

$$\mathbb{P}\left(\hat{p}_n - \frac{1,96}{2\sqrt{n}} \leq p \leq \hat{p}_n + \frac{1,96}{2\sqrt{n}} \right) \geq \underbrace{\mathbb{P}\left(\hat{p}_n - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p}_n + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)}_{\approx\, 0,95}$$

On propose donc comme IC asymptotique pour p :

$$\underline{IC_{0,95}(p) = \left[\hat{p}_n \pm \frac{0,98}{\sqrt{n}} \right]}.$$