Probabilités et Statistiques **2011-2012**
Correction du CC1

Exercice 1 (4,5 points)

On note

- A: l'étudiant donne la réponse A,
- B: l'étudiant donne la réponse B,
- C: l'étudiant donne la réponse C,
- R: l'étudiant connait la bonne réponse,
- $\bar{R}$: l'étudiant ne connait pas la bonne réponse.

D'après l'énoncé, on a

$$P(R) = \theta,\ P(A/R) = 1,\ P(A/\bar{R}) = P(B/\bar{R}) = P(C/\bar{R}) = \frac{1}{3}.$$

Question 1 (1,5 pts). En utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap R) + P(A \cap \bar{R}), \\ &= P(A/R)P(R) + P(A/\bar{R})P(\bar{R}), \\ &= \theta + \frac{1}{3}(1-\theta), \\ &= \frac{2}{3}\theta + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Question 2 (1 pts). En reprenant la question 1, on obtient (par définition d'une probabilité conditionnelle)

$$P(R/A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{\theta}{2/3\theta + 1/3}.$$

On aurait pu tout aussi bien appliquer directement la formule de Bayes.

Question 3 (1,5 pts). Pour cette question, on introduit pour tout $i \in \{1, \ldots, 24\}$ la variable aléatoire X_i définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i\text{eme etudiant donne la bonne reponse,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Clairement $X_i \sim Ber(p_A)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, 24\}$. Par ailleurs, les X_i étant indépendantes, on obtient que

$$N = \sum_{i=1}^{24} X_i \sim \mathcal{B}(24, p_A),$$

une somme de Bernoulli indépendantes suivant une loi binomiale.

Question 4 (0,5 pts). Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}[N] = 24p_A$.

Exercice 2 (4 points)

Question 1 (1,5 pts). Pour chaque $i = 1, 2, ...$, on note R_i l'événement "le $i$ème saut est réussi" et $\bar{R}_i$ l'événement complémentaire ("le $i$ème saut est un échec"). Comme chaque saut est indépendant des autres, les événements R_i sont tous indépendants et on a $P(R_i) = p$ et $P(\bar{R}_i) = 1 - p$.

On a $S = 2$ si les deux premiers sauts ont été des succès. On a donc

$$P(S = 2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) = p^2.$$

On a utilisé l'indépendance des événements R_1 et R_2 pour tranformer la probabilité de l'intersection en produit de probabilités.

On a $S = 3$ si il y a eu un échec sur trois tentatives, et le troisième saut a été couronné de succès. Dans la mesure où il reste deux possibilités pour le saut ayant échoué (nécessairement le premier ou le second), on obtient, en utilisant encore l'indépendance des événements R_1, R_2 et R_3:

$$\begin{aligned} P(S = 3) &= P(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) + P(\bar{R}_1 \cap R_2 \cap R_3) \\ &= P(R_1)P(\bar{R}_2)P(R_3) + P(\bar{R}_1)P(R_2)P(R_3) \\ &= p(1-p)p + (1-p)pp = 2(1-p)p^2. \end{aligned}$$

De la même manière, on a $S = 4$ dans la mesure où sur quatre tentatives, on a deux succès et deux échecs, le dernier saut étant forcément réussi, et que le premier succès a pu se produire lors du premier, du second ou du troisième saut (3 possibilités en tout donc, chacune de probabilité $(1-p)^2p^2$). On obtient

$$\begin{aligned} P(S = 4) &= P(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3 \cap R_4) + P(\bar{R}_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3 \cap R_4) + P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3 \cap R_4) \\ &= p(1-p)(1-p)p + (1-p)p(1-p)p + (1-p)(1-p)pp = 3(1-p)^2p^2. \end{aligned}$$

Question 2 (1 pt). Sur le même principe,

$$P(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

En effet, sur k tentatives, on a 2 succès (avec proba p^2), $k - 2$ échecs (avec proba $(1-p)^{k-2}$) et $k - 1$ possibilités pour la position du premier succès.

Question 3 (1,5 pts). la variable S prenant ses valeurs sur l'ensemble des entiers plus grand que 2, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} P(S=k) &= \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)p^2(1-p)^{k-2}, \\
&= p \times p \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)(1-p)^{k-2}, \\
&= p \times p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{k-1}, \text{ (changement de variable } n=k-1) \\
&= p \times \frac{1}{p} = 1,
\end{aligned}$$

où pour la dernière ligne on a reconnu la formule de l'espérance d'une géométrique.

On aurait pu faire aussi le calcul direct de la dernière somme en utilisant la dérivée d'une série géométrique (comme on a fait en TD pour calculer l'espérance de la loi Géométrique).

Exercice 3 (5,5 points)

Question 1 (1,5 pts). On peut déjà remarquer que $f(x) \geq 0$ pour tout réel x. Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Question 2 (0,5 pts). Par définition, on a ici

$$P(-1/2 < X < 1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} dx = \frac{1}{2}.$$

Question 3 (0.5 pts). On pose $Y = X^2$. Dans la mesure où X est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $[-1, 1]$, Y sera à valeurs dans $[0, 1]$.

Question 3 (2 pts). On cherche à calculer dans cette question la fonction F_Y qui à tout réel t associe $F_Y(t) := P(Y \leq t)$. Clairement, d'après la question 3, $F_Y(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_Y(t) = 1$ si $t > 1$. Reste maintenant à voir que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} dx = \sqrt{t}.$$

Question 4 (1 pt). Soit f_Y la densité de la variable aléatoire Y. En utilisant la formule $F_Y'(t) = f_Y(t)$, on obtient

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin [0,1], \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ si } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Question 5 (1 pt). En utilisant la définition de l'espérance, on arrive finalement à

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 t \times \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$