Probabilités et Statistiques **2011-2012**
Préorientation IC 3ème année

Exercice 3 (Planche 1)

Ici, les issues sont de la forme $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ où pour tout i, $\omega_i \in \{1, \ldots, 365\}$. On peut donc écrire que
$$\Omega = \{1, \ldots, 365\}^N.$$
Les dates d'anniversaire étant indépendantes d'une personne à l'autre, on a
$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{365^N} = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}, \ \forall \omega \in \Omega.$$
Il y a équiprobabilité: pour tout événement A, $P(A) = \mathrm{card}(A)/\mathrm{card}(\Omega)$. En particulier, si $A =$"*les personnes sont toutes nées un jours différents*", on obtient
$$P(A) = \frac{A_{365}^N}{365^N}.$$

Exercice 6 (Planche 1)

Dans tout l'exercice, pour tout $i \in \{1, \ldots, 3\}$, on définit les événements $R_i =$"*le signal i a été reçu*" et $E_i =$"*le signal i a été émis.* Le tableau donné dans l'ennoncé se lit comme une matrice: $p_{ij} = P(R_j/E_i)$.

a). Par la formule de Bayes
$$P(E_1/R_2) = \frac{P(R_2/E_1)P(E_1)}{\sum_{i=1}^3 P(R_2/E_i)P(E_i)} = \frac{p_{12} \times 1/3}{1/3 \times (p_{12} + p_{22} + p_{32})}.$$

b). Soit $\tilde{R}_3$ l'événement *le signal s_3 est reçu lors de la seconde émission.* Les événements R_3 et $\tilde{R}_3$ étant indépendants, on a $P(R_3 \cap \tilde{R}_3) = P(R_3).P(\tilde{R}_3) = P(R_3)^2$, avec
$$P(R_3) = \sum_{i=1}^3 P(R_3/E_i)P(E_i) = \frac{1}{3}.(p_{13} + p_{23} + p_{33}),$$
par la formule des probabilités totales.

Exercice 4 (Planche 2)

1). La variable T est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $T = k$ si et seulement si le composant a fonctionné les $k-1$ premières années et est tombé en panne l'année k. D'après les données de l'ennoncé, on a donc

$$P(T = k) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k-1} \times \frac{k-1}{k} = \frac{k-1}{k!}.$$

2). Par définition de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$