Correction rattrapage de Proba-Stat

3 IC , 2011 – 2012

Exc. 1

1) $\boxed{TLC}$: Si $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sont des v.a. indép., de même loi, admettant une variance, alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1),$$

avec $m = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.

2) • f_X densité de probabilité $\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ f_X \geq 0 & (OK) \\ \bullet\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1. \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,dx + \int_{1}^{\infty} e^{2(1-x)}\,dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{2(1-x)}}{2}\right]_1^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1} \quad (OK)$$

• $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\cdot\frac{1}{2}\,dx + \int_{1}^{\infty} x\cdot e^{2(1-x)}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} + \int_1^{\infty} x\cdot\left(\frac{-e^{2(1-x)}}{2}\right)'dx =$$

(IPP) $$= -\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}x\,e^{-2(1-x)}\right]_1^{\infty} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{\infty} e^{2(1-x)}\,dx}_{=\frac{1}{2}\ (\text{calculé avant})}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

• $$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\cdot\frac{1}{2}\,dx + \underbrace{\int_1^{\infty} x\,e^{2(1-x)}\,dx}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ (\text{fait avant})}$$

$$= \left[-\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{1}$$

• $$\mathbb{P}(X<0) = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

3) $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0{,}25 \times 0{,}2}{0{,}5} = \boxed{0{,}1}$

$\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B) \Rightarrow$ A et B ne sont pas indép.

4) Iné<u>g. de Chebychev</u> : $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon \right) \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Si $S \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(S) = np$, $Var(S) = np(1-p)$

$\hookrightarrow \mathbb{P}\left(|S - np| > t \right) \leq \dfrac{np(1-p)}{t^2}$, $\forall t > 0$.

5) $X \sim$ Poisson $(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$\hookrightarrow \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(t\lambda)^k}{k!}}_{e^{t\lambda} \text{ (série exponentielle)}} = e^{-\lambda} \cdot e^{t\lambda} = \underline{e^{\lambda(t-1)}}$.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ 1) $\mathbb{P}$(les deux joueurs perdent) $= \mathbb{P}$(la bille tombe sur une case noire ou verte)

$= \boxed{\dfrac{19}{37}}$

2) $C \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{18}{37} & \frac{19}{37} \end{pmatrix}$

$\mathbb{P}(C=1) = \mathbb{P}$(la bille tombe sur le rouge) $= \dfrac{18}{37}$

$\mathbb{P}(C=-1) = 1 - \mathbb{P}(C=1) = \dfrac{19}{37}$

$\mathbb{E}(C) = 1 \times \dfrac{18}{37} + (-1) \times \dfrac{19}{37} = \boxed{-\dfrac{1}{37}}$

3) $N \sim \begin{pmatrix} 35 & -1 \\ \frac{1}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}$

$\mathbb{P}(N=35) = \mathbb{P}$(la bille tombe sur 7) $= \dfrac{1}{37}$

$\mathbb{P}(N=-1) = 1 - \mathbb{P}(N=35) = 1 - \dfrac{1}{37} = \dfrac{36}{37}$

$\mathbb{E}(N) = 35 \cdot \dfrac{1}{37} - 1 \cdot \dfrac{36}{37} = \boxed{-\dfrac{1}{37}}$

4) $\mathbb{P}(C=1, N=35) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}3) \text{ la bille} \\ \text{tombe sur } 7\end{array}\right) = \frac{1}{37}$

$\mathbb{P}(C=1, N=-1) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{la bille tombe} \\ \text{sur rouge, mais} \\ \text{pas sur } 7\end{array}\right) = \frac{17}{37}$.

5) On remarque que $\mathbb{P}(C=1, N=35) \neq \mathbb{P}(C=1)\,\mathbb{P}(N=35)$

$\hookrightarrow$ C et N ne sont pas indép.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$

1) $X_1, \dots, X_n$ sont indép. et de même loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$

$\Rightarrow \overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(m_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right)$,

car $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{n \cdot m_1}{n} = m_1$

$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} \times n\sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{n}$.

car var. indép.

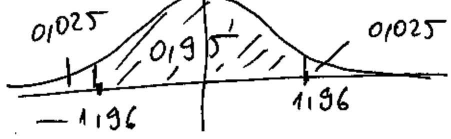
2) On a $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m_1)}{\sigma_1} \underset{\text{loi exacte}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ (grâce à la question 1) et la renormalisation

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-1{,}96 < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m_1)}{\sigma_1} < 1{,}96\right) = 0{,}95$

(car $F_Z(1{,}96) = 0{,}975 \Rightarrow \mathbb{P}(Z > 1{,}96) = 0{,}025$

et $\mathbb{P}(Z < -1{,}96) = 0{,}025$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|Z| < 1{,}96) = 0{,}95$, si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$)



$\Rightarrow \mathbb{P}\left(m_1 \in \left[\overline{X}_n \pm 1{,}96 \cdot \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow IC_{0{,}95}(m_1) = \left[\overline{X}_n + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right]$.

• Application numérique : $\left[68 \pm 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{300}}\right]$ (à calculer, exercice pour vous...)

3) a) $Y \sim \mathcal{N}(15, 5^2) \Rightarrow \dfrac{Y-15}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(Y > 20) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-15}{5} > \frac{20-15}{5}\right) = \mathbb{P}(Z > 1), \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= 1 - F_Z(1) = 1 - 0{,}841 = \boxed{0{,}159}$$

b) $T = X + Y$, avec $X \sim \mathcal{N}(70, 8^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(15, 5^2)$
et X, Y indép.

$\hookrightarrow T \sim \mathcal{N}(70+15, 8^2+5^2) \Rightarrow$
$\underline{T \sim \mathcal{N}(85, 89)}$

c) Le poids total des passagers avec leurs bagages $T_{tot} = T_1 + \ldots + T_{300}$,
avec T_i indép. et de loi $\mathcal{N}(85, 89)$

$\hookrightarrow T_{tot} \sim \mathcal{N}(300 \times 85, 300 \times 89)$.

d) $\mathbb{P}(\text{décollage interdit}) = \mathbb{P}(T_{tot} > 276200 - 250000)$

$$= \mathbb{P}(T_{tot} > 26200)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{T_{tot} - 300 \times 85}{\sqrt{300 \times 89}} > \frac{26200 - 300 \times 85}{\sqrt{300 \times 89}}\right)$$

$$= \mathbb{P}(Z > 4{,}284), \quad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= 1 - F_Z(4{,}284)$$

$$= 1 - 0{,}999991$$

$$= 0{,}000009 = \boxed{9 \times 10^{-6}}.$$