Correction de quelques exos de TD

$\boxed{\text{TD 3}}$

→ $\boxed{\text{Exo. 4}}$: 1) $Z \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_Z(x)\,dx =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\,dx$$

chg. de variable $y = x - t$, $dy = dx$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}_{=1 \text{ car densité de la loi } \mathcal{N}(0,1)} = \boxed{e^{\frac{t^2}{2}}}$$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

soit $Z = \frac{X-m}{\sigma} \Rightarrow X = m + \sigma Z$, avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(e^{t(m+\sigma Z)}\right) = e^{tm} \cdot \mathbb{E}\left(e^{(t\sigma)Z}\right) = e^{tm} \cdot e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$= \boxed{e^{tm + \frac{t^2\sigma^2}{2}}}.$$

2) $\frac{d}{dt}\mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}(X^k)}{k!}$ (on utilise le fait que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$)

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}(X)} = \frac{d}{dt}\mathbb{E}(e^{tX})\Big|_{t=0}$$

$$= \left[e^{tm + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot (m + t\sigma^2)\right]\Big|_{t=0} = \boxed{m}$$

Car : $\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}(X^k)}{k!} = 1 + t \cdot \mathbb{E}(X) + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}(X^2) + \dots$

On a aussi $\frac{d^2}{dt^2}\mathbb{E}(e^{tX})\Big|_{t=0} = \mathbb{E}(X^2)$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \left[e^{tm + \frac{t^2\sigma^2}{2}}(m + t\sigma^2)^2 + e^{tm + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot \sigma^2\right]_{t=0}$$

$$= m^2 + \sigma^2$$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{Var}(X)} = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = m^2 + \sigma^2 - m^2 = \boxed{\sigma^2}$$

On retrouve bien que $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

$\boxed{\text{TD 4}}$

$\boxed{\text{Exc. 1}}$ 2) $U, V \sim N(0,1)$ et indépendantes

$$T = \frac{U^2+V^2}{2}.$$

T est une var. aléat. continue à valeurs dans $[0,\infty)$.
On trouve d'abord sa fct. de répartition :

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{U^2+V^2}{2} \leq t\right) = \mathbb{P}(U^2+V^2 \leq 2t)$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}\big((U,V) \in \underbrace{D_0(\sqrt{2t})}_{\text{le disque de centre }(0,0)\text{ et de rayon }\sqrt{2t}}\big), & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Pour $\underline{t > 0}$: $F_T(t) = \mathbb{P}\big((U,V) \in D_0(\sqrt{2t})\big) = \iint_{D_0(\sqrt{2t})} f_{(U,V)}(x,y)\,dx\,dy$

U et V indép.

$$= \iint_{D_0(\sqrt{2t})} f_U(x) \times f_V(y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D_0(\sqrt{2t})} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

chang de coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$= \int_{r=0}^{\sqrt{2t}}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\,dr\,d\theta$$

r : le jacobien

$$= \int_0^{\sqrt{2t}} r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\sqrt{2t}} = \underline{1 - e^{-t}}$$

On a trouvé $F_T(t) = \begin{cases} 1-e^{-t}, & \text{pour } t > 0 \\ 0, & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f_T(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ T suit la loi Expo(1).