INSA de Toulouse - PO IC3 — Mercredi 18 janvier 2012
Probabilités et Statistiques

Evaluation 2

Durée 1h30

Tous les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (6 points)
Des électriciens interviennent dans un immeuble pour poser des tableaux électriques. Le fournisseur des ces tableaux a été choisi au hasard (probabilité 0.5) par le commanditaire des travaux parmi deux fabriquants U et V. Une fois le fournisseur choisi, **tous les tableaux proviennent du même fabriquant**.

Les tableaux du fournisseur U sont défectueux avec probabilité 0.1, ceux provenant du fournisseur V avec probabilité 0.3. Pour chaque fournisseur, ce mode de fonctionnement est indépendant d'un tableau à l'autre. On considère les événements suivants : $U=$ "tous les tableaux proviennent du fournisseur U",
$V=$ "tous les tableaux proviennent du fournisseur V" et $A_i=$ "le i-ème tableau est défectueux".

1. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(A_1|U)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap V)$ et montrer que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|U) = (0.1)^2$.
2. En déduire $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.
3. Les événements A_1 est A_2 sont-ils indépendants ? (on pourra utiliser le fait que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$).
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{3^n+1}{2\times 10^n}$. (Rappel : tous les tableaux proviennent du même fournisseur).
5. Sachant que les n premiers tableaux sont défaillants, quelle est la probabilité que le $(n+1)$-ème le soit également ?
6. Sachant que les n premiers tableaux sont défaillants, quelle est la probabilité qu'ils proviennent du fournisseur U ?

Exercice 2 (7 points)
Soit X une variable de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \exp(X/2)$. On suppose que Y modélise le temps d'attente d'un bus (en minutes).

1. Montrer que la variable Y est toujours supérieure ou égale à 1.
2. Quelle est la probabilité d'attendre le bus plus de 20 minutes ?
3. Déterminer la fonction de répartition de Y.
4. Déduire que la variable aléatoire Y admet comme densité de probabilité la fonction
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y^{-3} & \text{si } y \geq 1, \\ 0 & \text{si } y < 1. \end{cases}$$
5. Calculer le temps moyen d'attente du bus.
6. Sachant que l'on a déjà attendu le bus plus de 10 minutes, quelle est la probabilité que le bus n'arrive pas dans les 10 prochaines minutes ?

Exercice 3 (7 points)
On observe une suite de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$
$$P(X_i = 1) = p, \text{ et } P(X_i = -1) = 1 - p,$$
avec $p \in]0, 1[$ un paramètre inconnu. L'objectif de cet exercice est d'estimer p.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1.
2. On considère l'estimateur de p suivant :
$$\hat{p}_n = \frac{\bar{X}_n + 1}{2}, \text{ avec } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
Calculer l'espérance et la variance de l'estimateur $\hat{p}_n$.
3. Montrer que pour tout nombre réel $c > 0$ on a
$$\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| > c) \leq \frac{p(1-p)}{nc^2}.$$
4. Montrer que $\hat{p}_n$ est un estimateur consistant et sans biais de p.
5. Énoncer le Théorème de la limite centrale. Donner la loi asymptotique de $\bar{X}_n$ et en déduire celle de $\hat{p}_n$.
6. Montrer que la variable aléatoire
$$D_n = (\hat{p}_n - p)\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$$
suit approximativement la loi $N(0, 1)$ pour n grand.
7. Construire un intervalle de confiance de niveau 95% pour p.

   Indication : On pourra utiliser le fait que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, pour tout $p \in]0, 1[$. On rapelle également que $F_Z(1,96) = 0,975$ où F_Z désigne la fonction de répartition d'une loi $N(0, 1)$.