2010/11
IC3

Evaluation 1 (45 min)
Correction

Exercice 1 :

On introduit les notations suivantes :

- $P = \{\text{il pleut}\}$ ($P^c = \{\text{il fait beau}\}$)
- $C = \{\text{l'étudiant va en cours}\}$ ($C^c = \{\text{l'étudiant ne va pas en cours}\}$).

On a : $\mathbb{P}(P) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(C/P^c) = 0{,}5$ et $\mathbb{P}(C/P) = 0{,}8$.

On cherche : $\mathbb{P}(P/C)$. Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(P/C) = \frac{\mathbb{P}(C/P)\cdot\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(C/P)\cdot\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(C/P^c)\cdot\mathbb{P}(P^c)} = \frac{0{,}8\times\frac{3}{5}}{0{,}5\times\frac{2}{5}+0{,}8\times\frac{3}{5}} = \frac{24}{34} = \boxed{\frac{12}{17}}$$

Exercice 2 :

1. Z est à valeurs dans $\{-1,0,1\}$.
   - $\mathbb{P}(Z=-1) = \mathbb{P}(\{X=-1\}\cap\{Y=1\}) \overset{\text{Indépendance}}{=} \mathbb{P}(X=-1)\,\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{4}$.
   - $\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2}$.
   - $\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{4}$.

2. $\mathbb{E}[Z] = 1\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{2} + (-1)\times\frac{1}{4} = 0$.

   $\mathbb{E}[Z^2] = 1\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{2} + (-1)^2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{1}{2}$.

3.
   - $\mathbb{P}(\{Y=0\}\cap\{Z=1\}) = \mathbb{P}(\{Y=0\}\cap\{XY=1\}) = 0$ car $XY=0$ si $Y=0$.
   - $\mathbb{P}(Y=0)\,\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{8} \neq 0$. On en conclut que Y et Z ne peuvent être indépendantes.

Exercice 3 :

1. $\mathbb{P}(X>k) = p\sum_{\ell=k+1}^{+\infty}(1-p)^{\ell-1} = p(1-p)^k\sum_{m=0}^{+\infty}(1-p)^m = \frac{p(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k$

   De même $\mathbb{P}(X'>k) = (1-p')^k$.

2. $\mathbb{P}(\Pi>k) = \mathbb{P}(\{X>k\}\cap\{X'>k\}) \overset{\text{Indépendance}}{=} \mathbb{P}(X>k)\,\mathbb{P}(X'>k) = [(1-p)(1-p')]^k$
   $= [1-(p+p'-pp')]^k$.

3. On remarque que $\mathbb{P}(\Pi>k) = \mathbb{P}(Z>k)$ $\forall k\in\mathbb{N}^*$ où $Z\sim\mathcal{G}(p+p'-pp')$.

   On en déduit que $\forall k\in\mathbb{N}^*$:

   $$\mathbb{P}(\Pi=k) = \mathbb{P}(\Pi>k-1) - \mathbb{P}(\Pi>k) = \mathbb{P}(Z>k-1) - \mathbb{P}(Z>k) = \mathbb{P}(Z=k)$$

   d'où $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\Pi=k) = \mathbb{P}(Z=k) \Rightarrow \Pi$ et Z ont même loi
   $\Rightarrow \Pi\sim\mathcal{G}(p+p'-pp')$.