Correction Feuille TD3.

Exo 1

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

f densité de proba. sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ f \geq 0 & \text{ok} \\ \cdot\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}} \underset{\left(y=\frac{x-m}{\sigma}\right)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} =: \frac{I}{\sqrt{2\pi}}$$

<u>Astuce</u> : $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta$

$= 2\pi \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{+\infty} = 2\pi$. donc $I = \sqrt{2\pi}$.

Exo 2

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx \qquad (a>0)$$

1) $\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx = \left[-x^a e^{-x}\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx$

$= a\,\Gamma(a)$ donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$

2) $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f_a(x) = k\,x^{a-1} e^{-x}$.

$$\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \Gamma(a) = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{\Gamma(a)}$$

3) Soit X une v.a.r. de densité f_a sur $\mathbb{R}_+$.

- $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} x f_a(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} \frac{dx}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a$.
- $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2 f_a(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^{a+1} e^{-x} \frac{dx}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} = (a+1)a$

donc $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = (a+1)a - a^2 = a$.

2

Exo 3

T de loi $\exp(\lambda)$ donc de densité sur $\mathbb{R}_+$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

T est exprimée en minutes.

1) On a donc que $\mathbb{P}(T \leq 9697) = 0{,}02$. Le but est de déterminer λ. On a : $\int_0^t f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$ donc

$1 - e^{-9697\lambda} = 0{,}02$ càd $\lambda \approx 2{,}0831 \cdot 10^{-6}$

donc l'espérance de vie est $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 480050 \approx 8000\,h$.

2) $\mathbb{P}(T > t_0) = 0{,}85 \iff e^{-\lambda t_0} = 0{,}85 \iff t_0 \approx 7{,}801$ min

3) $\mathbb{P}(T > t_1 \mid T > t_0) = \frac{\mathbb{P}(T > t_1 ; T > t_0)}{\mathbb{P}(T > t_0)} = \frac{\mathbb{P}(T > t_1)}{\mathbb{P}(T > t_0)}$

$= e^{-\lambda(t_1 - t_0)} = \mathbb{P}(T > t_1 - t_0)$

Propriété d'absence de mémoire : on peut oublier l'instant de départ. Pour les v.a.r. continues, cette propriété caractérise la loi expo.

Exo 4

$\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(m ; \sigma^2) \\ Z \sim \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$ donc $X \overset{(loi)}{=} \sigma Z + m$

1) $E[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[x^2 - 2t]} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{t^2/2}$

donc $E[e^{tX}] = E[e^{t(\sigma Z + m)}] = e^{tm + \sigma^2 t^2/2}$

2) Soit $\Phi(t) = E[e^{tX}]$. On admettra que Φ est 2 fois dérivable en 0 :

$\Phi'(t) = E[X e^{tX}]$ et $\Phi''(t) = E[X^2 e^{tX}]$

donc $\Phi'(0) = E(X)$ et $\Phi''(0) = E(X^2)$

Or $\Phi'(t) = (m + t\sigma^2) e^{tm + \sigma^2 t^2/2}$ et $\Phi''(t) = [(m + t\sigma^2)^2 + \sigma^2] e^{tm + \sigma^2 t^2/2}$

donc $E(X) = \Phi'(0) = m$ et $Var(X) = \Phi''(0) - m^2 = m^2 + \sigma^2 - m^2 = \sigma^2$

③ **Exo 5**

$\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(m\,;\sigma^2) \\ Z \sim \mathcal{N}(0;1) \end{cases}$. On a $\mathbb{P}(X > 0{,}98) \geq 0{,}99$

$$\mathbb{P}(X > 0{,}98) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{0{,}98 - m}{\sigma}\right) \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{0{,}98-m}{\sigma}\right) \leq 0{,}01 = \mathbb{P}(Z \leq -2{,}325)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0{,}98 - m}{\sigma} \leq -2{,}325 \quad \text{car la } f^{ct} \text{ de répartition est } \nearrow$$

1) lorsque $\sigma = 0{,}03$, on a : $m \geq 2{,}325 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 2{,}354$

2) lorsque $m = 1$, $\sigma \leq \dfrac{0{,}02}{2{,}325} = 0{,}0086$.

Exo 6

$X \sim \mathcal{N}(m\,;\sigma^2)$ avec $\begin{cases} m = 75 \\ \sigma^2 = 16 \end{cases}$ $\quad Z \sim \mathcal{N}(0;1)$

Soit X_i la v.a.r. correspondant au poids de la ième personne. Les X_i sont indépendantes. Soit $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ le poids total des N personnes. On cherche N_{max} tel que

$$\mathbb{P}(S_N > 500) \leq 10^{-6}$$

On sait par le cours que $S_N \sim \mathcal{N}(Nm\,; N\sigma^2)$

donc $\mathbb{P}(S_N > 500) = \mathbb{P}\left(Z > \dfrac{500 - Nm}{\sqrt{N}\sigma}\right) \leq 10^{-6} = \mathbb{P}(Z > 4{,}75)$

$$\Leftrightarrow \quad 4{,}75 \leq \frac{500 - Nm}{\sigma\sqrt{N}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Nm + 4{,}75\,\sigma\sqrt{N} - 500 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 75N + 19\sqrt{N} - 500 \leq 0$$

donc $\sqrt{N} \in \left[0\,; \dfrac{-19 + 387{,}7}{150}\right]$

càd $\sqrt{N} \in [0\,; 2{,}46]$ donc $N \leq 6$.