Correction Exo 4, Feuille de TD 4

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X}_N)^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N \left(X_i^2 - 2X_i\overline{X}_N + (\overline{X}_N)^2\right)$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N X_i^2 - 2\cdot\frac{1}{N-1}\cdot\overline{X}_N\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^N X_i}_{= N\cdot\overline{X}_N} + \frac{N}{N-1}(\overline{X}_N)^2$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N X_i^2 - \frac{2N}{N-1}(\overline{X}_N)^2 + \frac{N}{N-1}(\overline{X}_N)^2$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N X_i^2 - \frac{N}{N-1}(\overline{X}_N)^2.$$

Par la loi des grands nombres,

$$\overline{X}_N = \frac{X_1 + \ldots + X_N}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{P}} m = \mathbb{E}(X_1).$$

Soit $Y_i := X_i^2$, $\forall\, i = 1,\ldots,N$.

On a que les (Y_i) sont indépendantes et de même loi,

et $\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 + m^2 < \infty$

donc par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i \xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2 + m^2.$$

! En utilisant l'indication, on obtient

$$S_N^2 = \underbrace{\frac{N}{N-1}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i^2 - \underbrace{\frac{N}{N-1}}_{\to 1}(\overline{X}_N)^2 \xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{P}} 1\times(\sigma^2+m^2) - 1\times m^2 = \boxed{\sigma^2}$$

! On a utilisé aussi le fait que si

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c, \text{ alors } X_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c^2,$$

ce qui est vrai, plus généralement, pour n'importe quelle fct. f qui est <u>continue au point c</u> : $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} f(c)$.