Correction CC2 IC3

Exo. 1

(1) Y est à valeurs dans $\{1,2,\dots,N\} =: E$.

- si $k < 1$: $F_Y(k) = 0$
- si $k \geq N$: $F_Y(k) = 1$
- si $k \in E$: $F_Y(k) = \mathbb{P}(Y \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k ; X_2 \leq k)$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq k)\,\mathbb{P}(X_2 \leq k) = \frac{k^2}{N^2}$$

(indépendance de X_1 et X_2)

(2) $\forall k \in E$, $\mathbb{P}(Y=k) = F_Y(k) - F_Y(k-1)$

$$= \frac{k^2}{N^2} - \frac{(k-1)^2}{N^2} = \frac{2k-1}{N^2}$$

(3) $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\in E} k\,\mathbb{P}(Y=k) = \frac{2}{N^2}\sum_{k\in E} k^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{k\in E} k$

$$= \frac{2N(N+1)(2N+1)}{6N^2} - \frac{1}{N^2}\cdot\frac{N(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(2N+1)}{3N} - \frac{N+1}{2N}$$

$$= \frac{(N+1)(4N-1)}{6N}$$

Exo. 2

(1) $U = \sum_{i=1}^{10} X_i$. $\mathbb{E}(U) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}(X_i) = 10 \times 20 = 200$.

$\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{Var}(X_i)$ car les (X_i) sont $\perp\!\!\!\perp$.

$= 10.\sigma^2$.

(2) Chebyshev : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.
pour toute variable aléatoire X admettant une variance.

(3) $\mathbb{P}(U \in [190;210]) = \mathbb{P}(U - \mathbb{E}(U) \in [-10;10])$

$$= \mathbb{P}(|U - \mathbb{E}(U)| \leq 10)$$

Chebyshev : $\mathbb{P}(|U - \mathbb{E}(U)| > 10) \leq \frac{\mathrm{Var}(U)}{100} = \frac{\sigma^2}{10}$.

donc il faut $\frac{\sigma^2}{10} \leq 1 - 0{,}95 = \frac{5}{100}$, càd $\sigma^2 \leq \frac{1}{2}$

donc $\sigma_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{,}414}{2} = 0{,}707$ convient.

(2)

Interprétation : la proba. que la masse totale d'or soit comprise entre 190 et 210 grammes est $\geq 95\%$.

(4) $X_i \sim \mathcal{N}(20\,;\sigma^2) \Rightarrow U \sim \mathcal{N}(200\,;10\sigma^2)$ car les (X_i) sont supposées $\underline{\mathrm{I}}$.

Posons $Z = \dfrac{U - E(U)}{\sqrt{Var(U)}} = \dfrac{U-200}{\sqrt{10}\,\sigma}$.

Alors $0{,}95 = P(U \leq 210) = P\left(Z \leq \dfrac{210-200}{\sigma\sqrt{10}}\right)$

$= F_Z\left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sigma}\right)$ donc $\dfrac{\sqrt{10}}{\sigma} = x_{0{,}95} = 1{,}645$

D'où $\sigma = \dfrac{\sqrt{10}}{1{,}645} = 1{,}922$.

Exo. 3

$$f_X(x) = \begin{cases} Cxe^{-kx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (k>0)$$

(1) f_X densité de proba. sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f_X(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$

$f_X(x) \geq 0$ si $C \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} cxe^{-kx}\,dx \underset{(IPP)}{=} \left[\frac{c}{-k}\,xe^{-kx}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} \frac{c}{k}e^{-kx}\,dx$$

$$= \left[-\frac{c}{k^2}e^{-kx}\right]_0^{+\infty} = \frac{c}{k^2}.$$

donc $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c = k^2$.

(2) $$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} k^2x^2e^{-kx}\,dx \underset{(IPP)}{=} \left[-kx^2e^{-kx}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} 2kxe^{-kx}\,dx$$

$$\underset{(IPP)}{=} \left[-2xe^{-kx}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} 2e^{-kx}\,dx$$

$$= \boxed{2/k}.$$

(3) $$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - E(X)^2$$

$$= \int_0^{\infty} k^2x^3e^{-kx}\,dx - 4/k^2$$

$$= \left[-kx^3e^{-kx}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 3kx^2e^{-kx}\,dx - 4/k^2$$

$$= \frac{3k\cdot E(X)}{k^2} - \frac{4}{k^2} = \frac{3k}{k^2}\cdot\frac{2}{k} - \frac{4}{k^2} = \boxed{\frac{2}{k^2}}.$$

(3)

(4) $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}(X)) = \mathbb{P}(X \geq 2/k) = \int_{2/k}^{\infty} k^2 x e^{-kx}\,dx$

$$\underset{(\text{IPP})}{=} \left[-k x e^{-kx}\right]_{2/k}^{\infty} + \int_{2/k}^{\infty} k e^{-kx}\,dx$$

$$= k\left(\frac{2}{k}\right) e^{-k(2/k)} + \left[-e^{-kx}\right]_{2/k}^{\infty}$$

$$= 2e^{-2} + e^{-k(2/k)} = \boxed{3/e^2}.$$

(5) $D_N = \sqrt{\frac{N}{2}}\,(\bar{X}_N - 2)$.

TCL : $\sqrt{N}\left(\frac{\bar{X}_N - m}{\sigma}\right) \underset{N \text{ grand}}{\overset{(\text{loi})}{\approx}} \mathcal{N}(0;1)$ avec $\begin{cases} m = \mathbb{E}(X_1) = \frac{2}{k} \\ \sigma = \text{Var}(X_1) = \frac{\sqrt{2}}{k} \end{cases}$

d'où $\sqrt{N}\left(\frac{\bar{X}_N - m}{\sigma}\right) = \sqrt{N}\left(\frac{\bar{X}_N - 2/k}{\sqrt{2}/k}\right) = \sqrt{\frac{N}{2}}\,(k\bar{X}_N - 2) = D_N$.

<u>Conclusion</u> : $D_N \underset{N \text{ grand}}{\overset{(\text{loi})}{\approx}} \mathcal{N}(0;1)$.

(6) Pour N grand :

$$0{,}95 = \mathbb{P}(|D_N| \leq x_{0,975}) = \mathbb{P}(|D_N| \leq 1{,}96)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\,|k\bar{X}_N - 2| \leq 1{,}96\right)$$

$$= \mathbb{P}\Big(k \in \underbrace{\left[\frac{2 - \sqrt{2/N}\cdot 1{,}96}{\bar{X}_N} ; \frac{2 + \sqrt{2/N}\cdot 1{,}96}{\bar{X}_N}\right]}_{IC_{0,95}(k)}\Big).$$

(7) $\bar{x}_N = \sqrt{2}$.

(a) $N = 100$: $IC_{0,95}(k) = \left[\frac{2\sqrt{N} \pm 1{,}96\sqrt{2}}{\sqrt{N}\,\bar{X}_N}\right]$

$$= \left[\sqrt{2} \pm 0{,}196\right]$$

$$= [1{,}218 ; 1{,}61]$$

(b) $N = 10\,000$: $IC_{0,95}(k) = [\sqrt{2} \pm 0{,}0196] = [1{,}3944 ; 1{,}4336]$

Rq : IC plus concentré pour $N = 10\,000$. Attendu car + $N \nearrow$, + l'estimation devient précise !!