1

Correction CC2

(3 pts)

Exo. 1 1pt (1) $S \sim \mathcal{B}in(3\,;p)$ car les (X_i) sont des Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$.

1pt (2) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{S=0\} \cup \{S=3\}) = \mathbb{P}(S=0) + \mathbb{P}(S=3)$
$= (1-p)^3 + p^3$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{S=0\} \cup \{S=1\}) = \mathbb{P}(S=0) + \mathbb{P}(S=1) = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2$
$= (1-p)^2(1+2p)$

1pt (3) A et B sont indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(S=0) = (1-p)^3 \\ \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \left((1-p)^3 + p^3\right)(1-p)^2(1+2p) = (1-3p+3p^2)(1-p)^2(1+2p). \end{cases}$$

Si $p = 1/2$ alors $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

(6 pts)

Exo. 2 1pt (1) $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \left[-x e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\pi/2}$.

1pt (2) Soit $x>0$. $F_X(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-x^2/2}$ $\quad (F_X(x) = 0$ si $x<0)$

1pt (3) $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y<y) = \mathbb{P}(X<\sqrt{y}) = 1 - e^{-y/2} \Rightarrow Y \sim \mathcal{E}xp(1/2)$

1pt (4) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{1/2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$.

1pt (5) Chebyshev : $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq A) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{A^2} \quad \forall A>0$

donc il suffit que $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{A^2}{100} \Leftrightarrow 2 - \pi/2 \leq \frac{A^2}{100}$
$\Leftrightarrow \sqrt{50(4-\pi)} \leq A$
$\Leftrightarrow \underbrace{6{,}55}_{A_{min}} \leq A$

1pt (6) $\mathbb{P}(Y>100 / X>5) = \mathbb{P}(X>10 / X>5)$
$$= \frac{\mathbb{P}(X>10)}{\mathbb{P}(X>5)} = \frac{1-F_X(10)}{1-F_X(5)} = \frac{e^{-10^2/2}}{e^{-5^2/2}} = e^{-37{,}5}$$

(5 pts)

Exo. 3 0,5pt (1) Par la loi des grands nombres, $\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i$ estime $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p}$

donc $1/\bar{X}_N$ estime p.

1pt (2) Par le théorème central limite : $\sqrt{N}\left(\frac{\bar{X}_N - m}{\sigma}\right) \underset{N\to+\infty}{\overset{(loi)}{\approx}} \mathcal{N}(0\,;1)$

où $\begin{cases} m = \mathbb{E}(X_1) = 1/p \\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) = 1/p^2 \end{cases}$ d'où $\sqrt{N}(p\bar{X}_N - 1) \underset{N\to+\infty}{\overset{(loi)}{\approx}} \mathcal{N}(0\,;1)$

1,5pt (3) $1-\alpha = \mathbb{P}\left(|\sqrt{N}(p\bar{X}_N - 1)| < q_{1-\alpha/2}\right)$. Ici $\alpha = 10\%$

donc $0{,}9 = \mathbb{P}\left(|\sqrt{N}(p\bar{X}_N - 1)| < 1{,}645\right)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(p \in \left[\frac{\sqrt{N} \pm 1{,}645}{\bar{X}_N\sqrt{N}}\right]\right) = 0{,}9$

donc $IC_{0,9}(p) = \left[\frac{\sqrt{N} \pm 1{,}645}{\bar{X}_N\sqrt{N}}\right]$.

(2) 0,5 pt (4) Taille $(ic) = \dfrac{\sqrt{N} + 1,645}{\bar{x}_N \sqrt{N}} - \dfrac{\sqrt{N} - 1,645}{\bar{x}_N \sqrt{N}} = \dfrac{2 \cdot 1645}{\bar{x}_N \sqrt{N}} = \dfrac{3,290}{\bar{x}_N \sqrt{N}}$.

(5) 0,5 pt (a) $ic_{0,9}(p) = \left[\dfrac{10 \pm 1,645}{3,41 \times 10} \right] = [0,245 \; ; \; 0,341]$

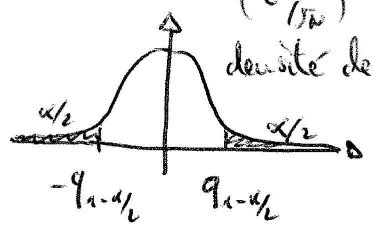
1 pt (b) $\dfrac{3,290}{\bar{x}_N \sqrt{N}} \leq \dfrac{1}{100} \iff \sqrt{N} \geq \dfrac{329}{3,41} \iff N \geq 9308,6$.

(6 pts) **exo. 4**

1,5 pt (1) Sous H_0, $\bar{X}_N \sim \mathcal{N}(m_0 ; \frac{\sigma^2}{N})$ car $E(\bar{X}_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = m = m_0$

et $Var(\bar{X}_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) = \sigma^2/N$ (car les X_i sont indépendantes)

1 pt (2) On a que : $\dfrac{\bar{X}_N - m_0}{(\sigma/\sqrt{N})} \sim \mathcal{N}(0;1)$



densité de $\mathcal{N}(0;1)$

donc $A_\alpha = q_{1-\alpha/2}$, le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0;1)$

1,5 pt (3) Rejet de $H_0 \iff \left| \dfrac{\bar{x}_N - m_0}{(\sigma/\sqrt{N})} \right| > q_{1-\alpha/2}$

$\iff \begin{cases} \bar{x}_N > q_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + m_0 = k_2^\alpha \\ \text{ou} \\ \bar{x}_N < -q_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + m_0 = k_1^\alpha \end{cases}$

1 pt (4) (a) Rejet de $H_0 \iff \dfrac{|\bar{x}_N - m_0|}{\sigma/\sqrt{N}} > q_{1-\alpha/2}$

$\iff \dfrac{2,23 - 2,15}{0,04} > 1,96 \iff 2 > 1,96$

donc on va rejeter ...

1 pt (b) Pour $\alpha = 1\%$, $q_{1-\alpha/2} = 2,575$ donc Rejet de $H_0 \iff \dfrac{2,23 - 2,15}{0,04} > 2,575$

donc on va accepter H_0.

Interprétation : α est une borne sur la proba. d'erreur (se tromper en rejetant H_0) donc plus α diminue, plus le niveau d'exigence augmente. Ainsi, on va avoir de plus en plus tendance à accepter H_0, c.à.d. d'être convaincu que les données sont compatibles avec un éventuel phénomène de résonance (lorsque la fréquence des vibrations se rapproche dangereusement de la fréquence propre du pont).