Probabilités et Statistiques **Mardi 19 janvier 2010**
Préorientation IC 3ème année

Examen final
Durée: 1h30

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Chacune de vos réponses devra être soigneusement justifiée.
Le barème sur 20 est approximatif.

Quelques rappels utiles :

- Fonction de répartition d'une variable aléatoire X : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- Quantiles d'une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $F_Z(1,645) = 0,95$ et $F_Z(1,96) = 0,975$.
- Moyenne empirique d'un N-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$: $\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$.
- Somme des N premiers carrés : $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.
- Quelques valeurs numériques : $\frac{\sqrt{10}}{1,645} = 1,922$ et $\sqrt{2} = 1,414$.

Exercice 1. Tirage de boules (5 pts)
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire deux fois de suite une boule dans l'urne avec remise après le premier tirage. Les deux tirages sont supposés indépendants. On note X_1 la variable aléatoire correspondant au résultat du premier tirage et X_2 celle associée au second tirage. On note enfin $Y = \max\{X_1, X_2\}$ la valeur maximale obtenue après les deux tirages.
1 - Calculez la fonction de répartition de Y.
2 - Déduisez-en que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, on a $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{2k-1}{N^2}$.
3 - Calculez l'espérance de Y.

Exercice 2. Chez Arthus-Bertrand (6 pts)
Un joaillier vend des bagues contenant en moyenne 20 grammes d'or. Un riche entrepreneur décide d'en acheter 10. Si l'on note X_i la variable aléatoire correspondant à la masse d'or contenue dans la i-ème bague, alors les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ sont indépendantes et de même loi (quelconque), et d'espérance $m = 20$ grammes. Enfin, on note $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ la variance des X_i et $U = \sum_{i=1}^{10} X_i$ la variable aléatoire représentant la masse totale d'or contenue dans les 10 bagues.
1 - Calculez l'espérance ainsi que la variance de U.
2 - Rappelez l'inégalité de Chebyshev.
3 - En appliquant cette inégalité à la variable aléatoire U, déterminez numériquement $\sigma_{\max}$, la valeur maximale de σ pour laquelle l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\mathbb{P}(190 \leq U \leq 210) \geq 0,95.$$

Quelle est votre interprétation de cette inégalité ?
4 - On suppose de plus que les X_i suivent la loi $\mathcal{N}(20, \sigma^2)$. Quelle est la loi de U ?
Déterminez alors la valeur de σ pour que l'acheteur ait exactement une probabilité de 95% de posséder une masse totale d'or inférieure à 210 grammes.

Exercice 3. Loi Kappa (9 pts)
Soit X la variable aléatoire réelle de densité f_X définie par:

$$f_X(x) = \begin{cases} C\,xe^{-\kappa x} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

où κ est un paramètre inconnu strictement positif.
1 - Déterminez en fonction de κ la valeur de la constante C pour que f_X soit effectivement une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2 - Montrez que l'espérance de la variable aléatoire X est égale à $\frac{2}{\kappa}$.
3 - Montrez que sa variance est égale à $\frac{2}{\kappa^2}$.
4 - Calculez la probabilité que X soit supérieure à son espérance.
5 - On souhaite à présent estimer le paramètre inconnu κ. Pour cela, on note $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ un N-échantillon issu de la variable aléatoire X, et

$$D_N = \sqrt{\frac{N}{2}}\,\left(\kappa\bar{X}_N - 2\right).$$

Montrez que lorsque N est suffisamment grand, la variable aléatoire D_N suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
6 - Déduisez-en un intervalle de confiance à 95% pour le paramètre inconnu κ.
7 - Application numérique. Après une étude sur cet échantillon, on obtient l'estimation ponctuelle suivante: $\bar{x}_N = \sqrt{2}$.

a - Pour $N = 100$, calculez numériquement l'intervalle de confiance précédent.

b - Même question avec $N = 10\ 000$. Quel phénomène observez-vous et pourquoi ?