INSA de Toulouse - PO IC3 Vendredi 3 décembre 2010
Probabilités et Statistiques

Evaluation 1

Durée 45 minutes

Exercice 1 (4,5 points)
Un étudiant de la PO IC3 va en cours avec une probabilité 0.5 quand il fait beau et 0.8 quand il pleut. Sachant qu'à Toulouse, il pleut 3 jours sur 5 en novembre, et que l'étudiant était en classe le 19, quelle est la probabilité ce jour là ait été un jour de pluie ? (On considèrera qu'il fait beau lorsqu'il ne pleut pas !)

Exercice 2 (4,5 points)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$$P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2} \text{ et } P(Y=1)=P(Y=0)=\frac{1}{2}.$$

1. On pose $Z=XY$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
2. Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathrm{Var}(Z)$.
3. Montrer que $P(\{Y=0\}\cap\{Z=1\})\neq P(Y=0)\times P(Z=1)$. Que peut-on en conclure sur l'indépendance de Y et Z ?

Exercice 3 (5 points)
Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p définie par

$$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ \text{pour tout } k\in\mathbb{N}^\star$$

Soit X' une autre variable aléatoire, indépendante de X et de loi géométrique de paramètre p'. On note par M le minimum de X et X'. On cherche à déterminer la loi de M.

1. Pour $k\in\mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(X>k)$ et $\mathbb{P}(X'>k)$.
2. Pour $k\in\mathbb{N}^\star$, exprimez l'événement $\{M>k\}$ en fonction des variables aléatoires X et X'. Montrer ensuite que
$$\mathbb{P}(M>k)=(1-(p+p'-pp'))^k.$$
3. Quelle est la loi de M ? (Indication : on pourra montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $P(Y_1>k)=P(Y_2>k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, alors Y_1 et Y_2 ont même loi).

Tous les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Le barême sur 14 est approximatif.