INSA Toulouse. 13 mars 2014
STPI $2^{\text{ème}}$ année IC

Examen de rattrapage de de Mathématiques

Durée de l'examen : 1h30

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (3 points) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner la forme polaire f (bilinéaire) associée.
2. La forme bilinéaire f définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? Justifier.

Exercice 2 (5 points) On cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial^2_{xx} f(x, y) + \partial^2_{yy} f(x, y) + 2\partial^2_{xy} f(x, y) = 24(x^2 - y^2). \tag{1}$$

On effectue le changement de variables $u = x + y,\ v = x - y$ et on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la relation $g(u, v) = f(x, y)$.

1. Calculer les dérivées partielles $\partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial^2_{xx} f,\ \partial^2_{yy} f$ et $\partial^2_{xy} f$ en fonction des dérivées partielles de g.
2. Montrer que f est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (1) si et seulement si g est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation
$$\partial^2_{uu} g(u, v) = 6uv.$$
3. Résoudre l'équation ci-dessus et en déduire toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation (1).
Indication : On pourrait observer d'abord que g vérifie $\partial^2_{uu} \big(g(u, v) - u^3 v \big) = 0$.

Exercice 3 (4,5 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^3 + 2y^2 + 4xy - 16.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer les points d'extremum local de f et préciser leur nature (minimum/maximum).
3. La fonction f admet-elle des points d'extremum global ? Justifier.

Exercice 4 (4 points) On considère les domaines suivants : $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

1. Dessiner les domaines C et D, puis donner leur aire.
2. Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$I_1 = \int_C (x + y)dxdy,\ I_2 = \int_D (x + y)dxdy.$$

Tourner la page S.V.P. .../...

Exercice 5 (3,5 points) On considère l'arc de courbe paramétrée par :

$$x(t) = t,\ y(t) = \mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

avec $t \in [0, 1]$.

1. En chaque point M_t de cet arc de courbe, déterminer le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}(t)$.
2. Calculer la longueur de cet arc de courbe.
3. Déterminer la courbure $\kappa(t)$ en tout point M_t de cet arc de courbe.