INSA TOULOUSE
Département STPI, $2^{\text{ème}}$ année IC
Année 2014-2015

Feuille de TD numéro 3

Exercice 1.

Calculer l'intégrale double $I = \int\int_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \geq 0, \ x+y \leq 1\}$.

Exercice 2.

Soit le domaine D défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1, \ x+y > 0, \ x-y > 0\}$.

1. Représenter graphiquement le domaine D et étudier ses symétries.
2. Calculer l'aire de D.
3. Calculer les intégrales doubles suivantes:

$$I_1 = \int\int_D (x+y)dxdy, \quad I_2 = \int\int_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}.$$

Exercice 3.

Soit $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq R^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$ et $K_R = [0,R] \times [0,R]$, pour $R > 0$.

1. Calculer $\int_{D_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy$.
2. Montrer que, pour tout $R > 0$, on a les inégalités suivantes:

$$\int_{D_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{K_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{D_{\sqrt{2}R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

3. En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale de Gauss: $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}dt$.

Exercice 4.

Identifier les ensembles suivants et calculer leur volume:

1. $D_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ avec $a, b, c > 0$. Qu'obtient-on dans le cas particulier $a = b = c = 1$?
2. $D_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0, \ x+y+z \leq 1\right\}$.

Exercice 5.

Soit une plaque homogène dont la forme est donnée par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-9 < 0, \ (x-1)^2+y^2 > 1\}.$$

1. Représenter graphiquement D et justifier que l'axe Ox est un axe de symétrie pour D.
2. Calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie (centre de gravité) G de la plaque:

$$x_G = \frac{\int_D xdxdy}{\int_D dxdy}, \quad y_G = \frac{\int_D ydxdy}{\int_D dxdy}.$$