Feuille de TD numéro 1

Exercice 1.

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}.$$

On exprimera le polynôme Δ_2 sous forme d'un produit de facteurs.

Exercice 2.

On considère la matrice réelle A de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de A et écrire la matrice semblable à A dans cette base.

Exercice 3.

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ par :

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{E}$ par deux méthodes: avec la définition et à l'aide d'une factorisation.
3. Trouver la matrice B de f dans la base $\mathcal{U} = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (1, 1)\}$ et donner ensuite l'expression de f dans cette base.
4. Vérifier la formule $B = P^T AP$, où P est la matrice de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$.

Exercice 4.

Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien canonique muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit le polynôme homogène en x, y, z et de degré 2 : $q(v) = x^2 - 2yz + xz$, où $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que ce polynôme est une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ et écrire la forme polaire associée f.
2. Écrire la matrice A de q dans la base $\mathcal{E}$.
3. On considère la nouvelle base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$v_1 = e_1,\ v_2 = 2e_1 + e_2 - 4e_3 \text{ et } v_3 = -\frac{1}{2}e_1 + e_3.$$

   (a) Écrire la matrice de q dans la base $\mathcal{V}$. Donner l'expression de q dans cette base.
   (b) q est-elle définie, positive ? La forme polaire f est-elle un produit scalaire?

Exercice 5.

Soit $(\mathbb{R}^3, <.,.>)$ l'espace euclidien canonique, orienté par la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$q(v) = (1-a)(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(xy + xz + yz),\ \forall v \in \mathbb{R}^3,\ v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1. Écrire la forme bilinéaire f associée à q et donner sa matrice A dans la base canonique.
2. Déterminer, pour a quelconque, les valeurs propres de la matrice A.
3. Pour quelles valeurs de a la forme bilinéaire f est-elle positive? définie?
4. Pour quelles valeurs de a l'espace $(\mathbb{R}^3, f)$ est euclidien?
5. Déterminer une base directe $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et orthonormée pour le produit scalaire canonique.
6. Écrire la matrice de passage P entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{V}$ et montrer qu'elle est orthogonale. Préciser la nature de la transformation géométrique associée à la matrice P.
7. Donner la matrice de q dans la base $\mathcal{V}$, ainsi que l'expression de q dans cette base.

Exercice 6.

Soit u un vecteur non nul de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$ et soit U sa matrice colonne dans la base canonique. On définit par P_u la matrice suivante:

$$P_u = I_n - \frac{1}{||U||^2} U U^T$$

et par p_u l'application linéaire associée à P_u. On note D la droite vectorielle engendrée par u.

1. Montrer que la matrice P_u est symétrique.
2. Montrer que $\forall v \in D$, $p_u(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall w \in D^\perp$, $p_u(w) = w$.
3. En déduire la nature géométrique de la transformation définie par p_u.

Exercice 7.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique. Soit q la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f la forme polaire associée à q.

1. Pour $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$, donner l'expression de $f(v, v')$ et $q(v)$.

2. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs suivants:

$$v_1 = e_1\,, \quad v_2 = -\frac{1}{2}e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad v_3 = -e_2 + e_3\,.$$

   Donner la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$, puis l'expression de q dans cette base.

3. La forme quadratique q est-elle positive? définie ? La forme polaire f est-elle un produit scalaire ?

   Pour les questions suivantes, on considère l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, f)$.

4. La base $\mathcal{E}$ est-elle orthogonale pour f ?

5. A l'aide des questions précédentes, donner une base de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour f. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour f.

6. Soit $v = e_1 - 2e_2$ et $v' = e_2 - e_3$. Montrer que v et v' sont orthogonaux pour f et vérifier ensuite le théorème de Pythagore.

7. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F pour le produit scalaire f.

8. Soit $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur $F^\perp$. Donner la matrice de $p_{F^\perp}$ dans la base canonique $\mathcal{E}$.

Exercice 8.

Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien canonique. On considère la matrice

$$A_a = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2a & 6 & -3 \\ -6a & 3 & 2 \\ 3a & 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice A_a soit orthogonale.

2. On suppose $a = 1$. Montrer que A_1 est la matrice d'une rotation autour d'un axe dont on déterminera l'axe et l'angle.