Correction Feuille 4

Exercice 1 1. $ds = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t\,dt$, $s = \mathrm{sh}^2 t$

2. $ds = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{th}^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta$, $ds = d\left(\theta - \mathrm{th}\frac{\theta}{2}\right)$; $s = \theta - \mathrm{th}\frac{\theta}{2}$

Exercice 2. 1. Par parité courbe symétrique par rapport à l'axe des x et des y ; réduction donc à $[0, \pi/2]$

$x'(t) = -\frac{3a}{2}\sin 2t \cos t$; $y'(t) = \frac{3a}{2}\sin 2t \sin t$

$\underline{M}'(t) = \frac{3a}{2}\sin 2t\,(-\cos t, \sin t)$; $\|M'(t)\| = 0$, $t = 0, \pi/2$

Courbe constituée de 4 arcs de courbe simples.

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\frac{3a}{2}\sin 2t\,dt = 6a$$

2. $\underline{T}(t) = (-\cos t, \sin t)$ est défini pour $t \neq 0, \pi/2$.

$\underline{T}'(t) = (\sin t, \cos t)$; défini pour $t \neq 0, \pi/2$

$\underline{N}(t) = T'(t)/\|T'(t)\| = (\sin t, \cos t)$; déf pour $t \neq 0, \pi/2$

3. $K(t) = \|T'(t)\| / \|M'(t)\| = 1 / \frac{3a}{2}\sin 2t$; $t \neq 0, \pi/2$

$R(t) = \frac{3a}{2}\sin 2t$; $t \neq 0, \pi/2$.

Exercice 3 1. $T'(s) = \theta'(s)\left(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)\right)$; $\|T'(s)\| = K(s) = \theta'(s)$

2. $\theta'(s) = 1/R$ d'où $\theta(s) = \theta_0 + \frac{s - s_0}{R}$; $x'(s) = \cos\left(\theta_0 + \frac{s - s_0}{R}\right)$

$y'(s) = \sin\left(\theta_0 + \frac{s-s_0}{R}\right)$; $x(s) = x_0 + R\sin\left(\theta_0 + \frac{s-s_0}{R}\right)$; $y(s) = y_0 - R\cos\left(\theta_0 + \frac{s-s_0}{R}\right)$

$(x(s) - x_0)^2 + (y(s) - y_0)^2 = R^2$

3. $\theta'(s) = 0$ d'où $\theta(s) = \theta_0$; $x'(s) = \cos\theta_0$, $y'(s) = \sin\theta_0$

$x(s) = x_0 + s\cos\theta_0$, $y(s) = y_0 + s\sin\theta_0$ (Eq. paramétriques droite)

Exercice 4 1. $N' = -\frac{1}{s\sqrt{2}}(T+B)$; $N'' = \frac{1}{s^2\sqrt{2}}(T+B) - \frac{1}{s\sqrt{2}}(T'+B')$

$N'' = -\frac{1}{s}N' - \frac{1}{s\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s\sqrt{2}}N + \frac{1}{s\sqrt{2}}N\right) = -\frac{1}{s}N' - \frac{1}{s^2}N$.

En utilisant $T' = \frac{1}{s\sqrt{2}}N$, il vient $s^2(s\sqrt{2}\,T')'' + s(s\sqrt{2}\,T')' + s\sqrt{2}\,T' = 0$

$s\sqrt{2}\left(s^2T''' + 3sT'' + 2T'\right) = 0$; $s\sqrt{2}\left(s^2T'' + sT' + T\right)' = 0$.

Par continuité en 0, on a $\left(s^2T'' + sT' + T\right)' = 0$; $s^2T'' + sT' + T = K$.

2. $z'(u) = sy'(s)$; $z''(u) = s(sy')' = s^2y'' + sy'$

$z''(u) + z(u) = k$ a pour sol. gle : $z(u) = C\cos u + D\sin u + k$

$$\eta'_u = \eta'_s\,s = e^u\left(C\cos u + D\sin u + K\right)$$

$$\eta_u = e^u\left(A\cos u + B\sin u + K\right) + E.$$

Exercice 5 1. Equation du plan tangent

$$\det\begin{vmatrix} x - r\cos\theta & \cos\theta & -r\sin\theta \\ y - r\sin\theta & \sin\theta & r\cos\theta \\ z - f & \partial_r f & \partial_\theta f \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{aligned} &x(\sin\theta\,\partial_\theta f - r\,\partial_r f\cos\theta) \\ &- y(\cos\theta\,\partial_\theta f + r\,\partial_r f\sin\theta) + rz = \\ &-r^2\partial_r f + rf \end{aligned}$$

2. $x = 0$, $y = 0$, $z = \text{cste}$, $\theta = \text{cste}$: $r\,\partial_r f - f = -z$.

Sol. gle : $f(r, \theta) = r\,\varphi(\theta) + z$, $\varphi(\theta)$ fct qq de θ.