$Hf(a)$ est une matrice symétrique ; il existe U mat. orthogonale telle que

$$U^T Hf(a)\, U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ v.p. de } Hf(a)$$

si $Hf(a)$ est définie positive $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

il vient donc en posant

$$\begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} [y_1 \dots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \|x-a\|^2 \varepsilon(x,a)$$

On a donc $f(x) - f(a) \geq \frac{\lambda_1}{2} \left(y_1^2 + \dots + y_n^2 \right) + \|x-a\|^2 \varepsilon(x,a)$

ou encore $f(x) - f(a) \geq \frac{\lambda_1}{2} \|y\|^2 + \|x-a\|^2 \varepsilon(x,a)$

Mais comme U est orthogonale $\|(x-a)\| = \|Uy\| = \|y\|$

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^2 \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon(x,a) \right)$$

Comme $\lim_{x \to a} \varepsilon(x,a) = 0$, $f(x) - f(a)$ est du signe de λ_1 lorsque x tend vers a ; On obtient que f admet un minimum local au point $x = a$; on a de même f admet un maximum local en $x = a$ si toutes les valeurs propres de $Hf(a)$ sont < 0.

3.(a) Eq. normales $\partial_x f = 2x + y - 3 = 0$

$\partial_y f = x + 2y - 6 = 0$

Un seul point critique : $(x = 0,\ y = 3)$

(b) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $p(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda)$

f coïncide avec son dév. de Taylor car les dérivées d'ordre 3 de f sont nulles

$$f(x,y) = f(0,3) + \frac{1}{2} [x \ \ (y-3)] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-3 \end{bmatrix}.$$

les val. propres de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ sont 1 et 3, on peut donc écrire

$$f(x,y) \geq f(0,3) + \frac{1}{2} \|(x, y-3)\|^2 = 3 + \frac{1}{2} \|(x, y-3)\|^2$$

Donc f admet un minimum global au pt $(0,3)$

Exercice 8

1. $\partial_x f = 3x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3$

$= x^2 y^2 (3 - 4x - 3y)$

$\partial_y f = x^3 y (2 - 2x - 3y)$

On obtient donc les points critiques

$(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$; $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ et $\left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6xy^2(2x+y-1) & -x^2y(8x+9y-6) \\ -x^2y(8x+9y-6) & -2x^3(x+3y-1) \end{bmatrix}$$

Points critiques $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$Hf(x,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2x^3(x-1) \end{bmatrix}$$; 1 val propre nulle

on ne peut rien dire directement ; Cependant le terme dominant si $y \to 0$ est $x^3y^2(1-x)$ et donc on a un minimum ou un maximum local suivant que $x^3(1-x)$ est >0 ou <0.

Points critiques $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

$$Hf(0,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 2 val propres nulles

on ne peut rien dire directement ; on a ici aussi le terme dominant de $f(x,y)$ lorsque $x \to 0$. qui est donné par $x^3y^2(1-y)$; on voit que $f(x,y)$ change de signe lorsque x change de signe ; donc $(0,y)$ n'est pas un extremum local.

$$Hf(x,y)\Big|_{\substack{x=1/2\\ y=1/3}} = \begin{bmatrix} -1/9 & -1/12 \\ -1/12 & -1/8 \end{bmatrix}$$

val propres $\lambda_1 = \frac{1}{144}\left(\sqrt{145} - 17\right)$; $\lambda_2 = \frac{1}{144}\left(\sqrt{145} - 17\right)$

Comme $17^2 = 289$; λ_1 et λ_2 sont négatives

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ est donc un maximum local.