Correction exercice 7 – Feuille 1

1. $A_a$ est une matrice orthogonale ssi ses vecteurs colonne $a_{*1} = \frac{a}{7}(2,-6,3)$, $a_{*2} = \frac{1}{7}(6,3,2)$, $a_{*3} = \frac{1}{7}(-3,2,6)$ forment une b.on de $\mathbb{R}^3$.

$\langle a_{*2}, a_{*3} \rangle = \frac{1}{49}(-6\times 3 + 3\times 2 + 2\times 6) = 0$

$\langle a_{*1}, a_{*2} \rangle = \frac{a}{49}(2\times 6 \cdot 6\times 3 + 3\times 2) = 0$

$\langle a_{*1}, a_{*3} \rangle = \frac{a}{49}(-2\times 3 - 6\times 2 + 3\times 6) = 0$

$\langle a_{*2}, a_{*2} \rangle = \frac{1}{49}(6\times 6 + 3\times 3 + 2\times 2) = \frac{49}{49} = 1$

$\langle a_{*3}, a_{*3} \rangle = \frac{1}{49}((-3)\times(-3) + 2\times 2 + 6\times 6) = \frac{49}{49} = 1$

$\langle a_{*1}, a_{*1} \rangle = \frac{a^2}{49}(2\times 2 + (-6)\times(-6) + 3\times 3) = a^2$

A est donc une mat orth ssi $a^2 = 1$ i.e $a = \pm 1$

2. $A = A_1$ est déjà une mat. orth. Elle sera la matrice d'une rotation ssi $\det A = 1$

Or

$$\det\left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7^3}\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(Attention : on factorise ici $\frac{1}{7}$ de chaque colonne !)

Par la règle de Sarrus on a

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2\times 3\times 6 + 6\times 2\times 3 + (-6)\times 2\times(-3) - (-3)\times 3\times 3 - 2\times 2\times 2 - 6\times(-6)\times 6 = 343 = 7^3.$$

A est bien la matrice d'une rotation. (Attention toute rotation n'est pas une rotation autour d'un axe)

× On cherche un vect. $v \neq 0$ colinéaire à l'axe ; et donc $v$ est invariant par la rotation i.e $Av = v$, ou encore si $(x,y,z)$ sont les composantes de $v$

$$\begin{cases} 2x + 6y - 3z = 7x & \leftarrow \text{attention au coef } 7 \\ -6x + 3y + 2z = 7y \\ 3x + 2y + 6z = 7z \end{cases}$$

| | | |
|---|---|---|
| $-5x + 6y - 3z = 0$ | Eq1 : | $-5x + 6y - 3z = 0$ |
| $-6x - 4y + 2z = 0$ | $5Eq2 - 6Eq1$ : | $-56y + 28z = 0$ |
| $3x + 2y - z = 0$ | $5Eq3 + 3Eq1$ : | $28y - 14z = 0$ |

La dernière éq. est redondante

$$\begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 & -5x + 3z - 3z = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2y - z = 0 & y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$x, y$ de base ; $z$ libre

Esp. des sol : $\text{Vect}\left(\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)\right)$ = axe de la rotation

$v = (0,1,2)$ est colinéaire à l'axe de la rotation avec $0 < \theta < 2\pi$ l'angle de la rotation.

Dans une base orthonormée directe $\{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_3 = v / \|v\|$, la matrice de la rotation s'écrit

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et si donc $U$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{u_1, u_2, u_3\}$

$$U^{-1} A U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et donc $\operatorname{trace} A = \operatorname{trace} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{trace} A = \frac{1}{7}(2+3+6) = \frac{11}{7} = 2\cos\theta + 1$$

$\cos\theta = \frac{2}{7}$. On a donc

$$\theta = \begin{cases} \arccos\frac{2}{7} & \text{si } \sin\theta > 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{2}{7} & \text{si } \sin\theta < 0 \end{cases}$$

Pour calculer le signe de $\sin\theta$, on prend $w \perp v$ (par exemple $w = (0, 2, -1)$)

et on a le pd mixte

$$v \cdot w \times Aw = \|v\| \, \|w\| \, \|Aw\| \sin\theta$$

et donc le signe de $\sin\theta$ est donné par le signe du déterminant dont les colonnes sont les composantes de $v = (0,1,2)$, de $w = (0,2,-1)$ et

$$Aw = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9/7 \\ 1 & 2 & 4/7 \\ 2 & -1 & -2/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{9}{7}(-1-4) < 0$$

On a donc $\sin\theta < 0$ et ainsi

$$\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$$