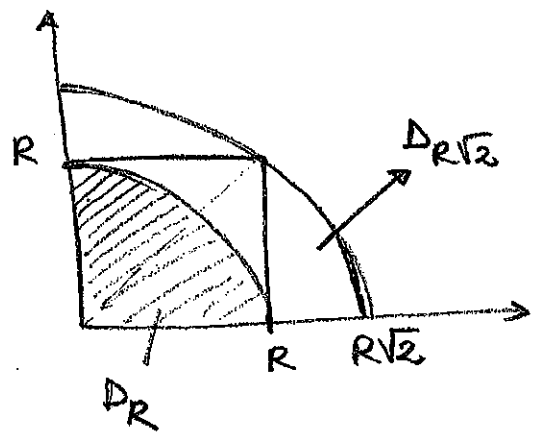
Exercice 3

1) $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2} \cdot r \, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = \boxed{\frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4}}$$

Chang. de coordonnées polaires :

$$\Psi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0,R], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



2) On a $D_R \subset K_R \subset D_{R\sqrt{2}}$

et $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$, $\forall x, y$

donc $$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_{K_R} (\ldots) \leq \int_{D_{R\sqrt{2}}} (\ldots).$$

3) $$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx\, dy$$
$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right) \left(\int_0^R e^{-y^2} dy\right) = I_R^2,$$

où $I_R = \int_0^R e^{-t^2} dt$.

De l'inégalité de la question 2) + l'intégrale calculée en 1) :

$$\Rightarrow \frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} \leq I_R^2 \leq \frac{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \leq I_R \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}} \quad (\text{car } I_R \geq 0)$$

En faisant $R \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \lim_{R\to\infty} I_R = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$