Correction CC2 Maths

2IC, 2014-2015

$\boxed{\text{Ex. 1}}$

1) $\phi(x,y) = (2x+y,\ 2x-y)$.

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On va m.q. $\exists!\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\phi(x,y) = (u,v)$.

$$\begin{cases} 2x+y = u \\ 2x-y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{4} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \quad \text{unique sol.} \Rightarrow \phi \text{ bijective.}$$

$(x,y) \longmapsto 2x+y$ de classe C^∞

$(x,y) \longmapsto 2x-y$ de classe C^∞ (thm. généraux) $\Rightarrow \phi \in C^\infty$.

2) $g(x,y) = f(u,v)$. Par la règle de la chaîne on obtient :

$$\underline{\partial_x g} = \partial_u f \cdot \partial_x u + \partial_v f \cdot \partial_x v = \underline{2\partial_u f + 2\partial_v f}$$

$$\underline{\partial_y g} = \partial_u f \cdot \partial_y u + \partial_v f \cdot \partial_y v = \underline{\partial_u f - \partial_v f}$$

3) $$\partial^2_{xx} g = \partial_x(\partial_x g) = 2\partial_x(\partial_u f) + 2\partial_x(\partial_v f)$$
$$= 2\left[2\partial^2_{uu} f + 2\partial^2_{vu} f\right] + 2\left[2\partial^2_{uv} f + 2\partial^2_{vv} f\right]$$
$$= 4\left(\partial^2_{uu} f + 2\partial^2_{uv} f + \partial^2_{vv} f\right).$$

$$\partial^2_{yy} g = \partial_y(\partial_y g) = \partial_y(\partial_u f - \partial_v f) = \left[\partial^2_{uu} f - \partial^2_{vu} f\right] - \left[\partial^2_{uv} f - \partial^2_{vv} f\right]$$
$$= \partial^2_{uu} f - 2\partial^2_{uv} f + \partial^2_{vv} f.$$

4) g vérifie (1) $\Leftrightarrow$
$$4\left(\partial^2_{uu} f + 2\partial^2_{uv} f + \partial^2_{vv} f\right) - 4\left(\partial^2_{uu} f - 2\partial^2_{uv} f + \partial^2_{vv} f\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow 16\,\partial^2_{uv} f = 1 \Leftrightarrow \partial^2_{uv} f(u,v) = \underbrace{\frac{1}{16}}_{\alpha}.$$

5) $$\partial^2_{uv}\left(f(u,v) - \alpha uv\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \partial^2_{uv} f(u,v) - \alpha \underbrace{\partial^2_{uv}(uv)}_{1} = 0 \Leftrightarrow \partial^2_{uv} f(u,v) = \alpha, \text{ avec } \alpha = 1/16.$$

6) $$\partial^2_{uv}\left(f(u,v) - \alpha uv\right) = \partial_u\left(\partial_v\left(f(u,v) - \alpha uv\right)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \partial_v\left(f(u,v) - \alpha uv\right) = a(v), \quad \text{avec } a \in C^1.$$
$$\Rightarrow f(u,v) - \alpha uv = A(v) + B(u), \quad \text{avec } A \text{ la primitive de } a \text{ donc } A \in C^2$$
$$\Rightarrow f(u,v) = A(v) + B(u) + \alpha uv.$$
et B quelconque de classe C^2.

$$\Rightarrow \quad g(x,y) = f(2x+y, 2x-y) = \underbrace{A(2x-y)}_{= p(x,y)} + \underbrace{B(2x+y)}_{= q(x,y)} + \alpha uv.$$

p et q sont de classe C^2.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.

1) $\begin{cases} \partial_x f = 0 \\ \partial_y f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$

On déduit $x = x^4 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^3 = 1$.

Donc $x = 0$ ou $x = 1$.

Les points critiques sont : $\underline{(0,0)}$, $\underline{(1,1)}$.

2) La matrice hessienne : $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \partial^2_{xx} f & \partial^2_{xy} f \\ \partial^2_{yx} f & \partial^2_{yy} f \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$

Pour $\underline{(0,0)}$: $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $Hf(0,0)$ vérifient : $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(Hf(0,0)) = 0$
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \mathrm{Det}(Hf(0,0)) = -9$

$\Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$

$\Rightarrow Hf(0,0)$ n'est ni positive déf., ni nég. déf.

$\Rightarrow$ $\underline{(0,0) \text{ n'est pas un point d'extremum local}}$
$\underline{\text{(c'est un point selle)}}$

Pour $\underline{(1,1)}$: $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

On a $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = -12 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 36 - 9 = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$
$\Rightarrow Hf(1,1)$ nég. définie

$\Rightarrow$ $\underline{(1,1) \text{ est un point de maximum local.}}$

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ 1) $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$ solution unique du système.

Les conditions : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$ sont équivalentes à

$u+v \geq 0$, $u-v \geq 0$, $u \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 1$, $-u \leq v \leq u$

Donc on a une bijection entre D et H

Soit $\phi(u,v) = (x,y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

$\phi \in C^1$ (même C^∞)

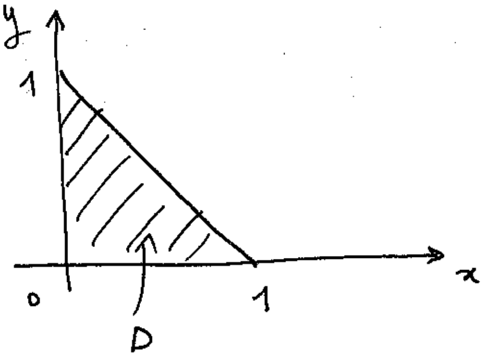
$\det(\phi'(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$, $\forall (u,v) \in H$

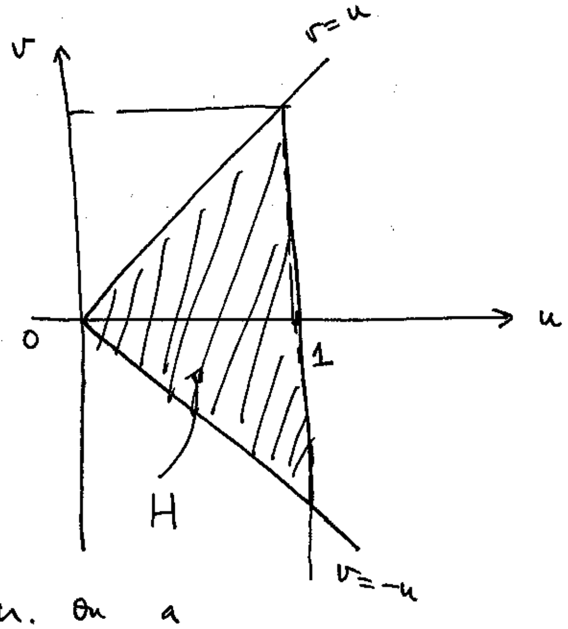
(le jacobien)

ϕ bijective, $\phi : H \longrightarrow D$

donc ϕ est un chang. de var.

2)





3) Par la formule de chang. de var. on a

$$I = \int_D 2\left(x+y+\sqrt{(x+y)^2+1}\right) dx\,dy = \int_H 2\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) \cdot \left|\det(\phi'(u,v))\right| du\,dv$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-u}^{u} \left(u+\sqrt{u^2+1}\right) dv \right) du$$

$$= \int_0^1 \left(u+\sqrt{u^2+1}\right) \cdot 2u \; du = \left[\frac{2u^3}{3} + \frac{2}{3}\left(u^2+1\right)^{3/2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{3}}.$$

$\boxed{\text{Exc. 4}}$ $r(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix}$, $r'(t) = \begin{bmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \end{bmatrix}$

1) $\|r'(t)\| = e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} = e^t \cdot \sqrt{2}$.

$\Rightarrow l_0 = \int_0^{t_0} \|r'(t)\| dt = \int_0^{t_0} e^t \sqrt{2}\, dt = \left[e^t \sqrt{2}\right]_0^{t_0} = \underline{\sqrt{2}\left(e^{t_0} - 1\right)}$.

2) $T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix}$.

$N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$. On a $T'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin t - \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix}$.

$\|T'(t)\| = 1$ donc $N(t) = T'(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix}$

3) $K(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, e^t}$.

Les coordonnées du centre de courbure :

$$c(t) = r(t) + \frac{1}{K(t)} \cdot N(t) = e^t \cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \sqrt{2}\, e^t \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix}$$

$$= e^t \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$