2IC + FAS

Correction CC1, 2014-2015

$\boxed{\text{Exc. 1}}$ 1) $g(v) = f(v,v)$, avec $f(v,v') = a(xx'+yy'+zz') + xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z$ (par dédoublement de var.)

$f(v,v') = (x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

avec $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ symétrique $\Rightarrow f$ est une forme bilinéaire sym.

- Comme $g(v) = f(v,v)$, avec f forme bil. sym. $\Rightarrow g$ est une forme quadratique et f est la forme bilinéaire associée
- $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{E}) = A$.

2) $\underline{a=1} \Rightarrow g(v) = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = (x+y+z)^2$ (identité remarquable)

On a $g(v) \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow g$ positive.

Par contre, g n'est pas définie car par exemple $g(\underbrace{(1,0,-1)}_{\neq(0,0,0)}) = 0$.

3) $\underline{a=2} \Rightarrow g(v) = 2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz$
$= (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 \geq 0$, $\forall v \Rightarrow g$ est positive.

- $g(v) = 0 \Rightarrow x+y = x+z = y+z = 0$ (car somme de carrés)
$\Rightarrow x=y=z=0 \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow g$ définie positive

4) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a-\lambda+2 & 1 & 1 \\ a-\lambda+2 & a-\lambda & 1 \\ a-\lambda+2 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-\lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} (a-\lambda+2)$

$= (a-\lambda-1)(a-\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda-1)^2(a-\lambda+2)$. $\Rightarrow \underline{Sp(A) = \{a-1, a+2\}}$.

- f est une forme bilin. symétrique. Pour que f soit un produit scalaire il faut en plus qu'elle soit pos. définie $\Leftrightarrow$ les v.p. sont > 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 > 0 \\ a+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a-1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{a > 1}$

5) • Trouver l'espace propre $\underline{E_{a-1}}$, qui est de dimension 2 : Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$(A-(a-1)I_3)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z = 0 \Leftrightarrow z = -x-y$

$\Rightarrow E_{a-1} = \{(x,y,-x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,0,-1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-1)}_{v_2})$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \neq 0 \Rightarrow$ on applique le procédé de Gram–Schmidt :

$u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}$

$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \perp u_1$

$u_2 = \dfrac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)}$

• Trouver $\underline{E_{a+2}}$: $(A-(a+2)I_3)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ x-2y+z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z \Rightarrow \underline{E_{a+2} = \mathrm{Vect}(1,1,1)}$

$\boxed{u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$

$$\det[u_1,u_2,u_3] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_1}{=} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times 6 = 1 \; \underline{> 0}$$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base <u>directe</u> et orthonormée formée de vect. propres

$$U = P_{\mathcal{E}\mathcal{U}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

. U est la matrice d'une rotation, car U est orthogonale (car les colonnes forment une base orthonormée) et $\det(U) = 1$.

6) $$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{U}) = U^T A U \underset{\text{car orthogonale}}{=} U^{-1} A U = \Delta = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g(v) = (X\ Y\ Z)\, \Delta \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (a-1)X^2 + (a-1)Y^2 + (a+2)Z^2.$$

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ 1) d_1 et d_2 ne sont pas colinéaires $\Rightarrow \{d_1, d_2\}$ libre $\Rightarrow \dim(E) = 2$. ($\Rightarrow$ base dans E)

On applique le procédé de Gram-Schmidt :

- $u_1 = \frac{d_1}{\|d_1\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)}$
- $\tilde{u}_2 = d_2 - \langle d_2, u_1 \rangle u_1 = (1,1,1,1) - (1,0,1,0) = (0,1,0,1) \perp u_1$

  $u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)}$

2) a) Soit $v_1, v_2 \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On montre que $\alpha v_1 + v_2 \in F$ aussi.

$\langle \alpha v_1 + v_2, d_i \rangle \underset{\text{bilinéarité}}{=} \alpha \langle v_1, d_i \rangle + \langle v_2, d_i \rangle = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$, car $v_1, v_2 \in F$ pour $i = 1, 2$.

$\hookrightarrow F$ est un sous-espace vect. de $\mathbb{R}^4$.

- $v = (x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \langle v, d_1 \rangle = 0 \\ \langle v, d_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}$

  $\Leftrightarrow v = (x, y, -x, -y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $F = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,0,-1,0)}_{w_1}, \underbrace{(0,1,0,-1)}_{w_2}\big)$. On remarque que $\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \Rightarrow$ orthogonaux

On pose $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)}$ et $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)}$.

c) $\left.\begin{array}{l}\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_2 \rangle = 0 \\ \text{et } \|u_1\| = \|u_2\| = \|v_1\| = \|v_2\| = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{U} = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ base orthonormée de $\mathbb{R}^4$

$$U = P_{\mathcal{E}\mathcal{U}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

. U est orthogonale car les colonnes forment une base orthonormée

$$\Rightarrow U^{-1} = U^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{array}$$

d) $v = e_1 - e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_2\right)$

$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2)}_{= s \in E} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)}_{= t \in F}$. Donc $s = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2) = \underline{\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)}$,

$t = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2) = \underline{\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)}$

On a $\langle s, t \rangle = 0$ car $s \in E$, $t \in F = E^{\perp}$.

$\|s+t\|^2 = \|v\|^2 = 2$, $\|s\|^2 = \|t\|^2 = 1 \Rightarrow \|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$ et $\langle s, t \rangle = 0 \Rightarrow$ Thm Pythagore vérifié.