I.N.S.A de TOULOUSE 8 janvier 2015

Département STPI, 2ème année IC

Contrôle 2 de Mathématiques

Durée 1h30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème est indicatif.

Exercice 1 (sur 8 points)

On cherche les solutions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation

$$\partial^2_{xx} g(x,y) - 4\partial^2_{yy} g(x,y) = 1, \text{ pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

1. On pose $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x,y) = (2x+y, 2x-y)$. Montrer que ϕ est bijective et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Soit f définie par la relation $f(u,v) = g(x,y)$, avec $u = 2x+y,\ v = 2x-y$.
   Calculer $\partial_x g(x,y)$ et $\partial_y g(x,y)$ à l'aide des dérivées partielles de f.
3. Calculer $\partial^2_{xx} g(x,y)$ et $\partial^2_{yy} g(x,y)$ à l'aide des dérivées partielles d'ordre 2 de f.
4. Déduire de la question précédente que g vérifie l'équation (1) si et seulement si f vérifie l'équation
   $$\partial^2_{uv} f(u,v) = \alpha,$$
   où α est une constante dont on donnera la valeur.
5. Montrer que l'équation précédente s'écrit
   $$\partial^2_{uv} \left(f(u,v) - \alpha uv\right) = 0.$$
6. En déduire l'expression des solutions de l'équation (1) à l'aide de deux fonctions arbitraires p et q de classe $\mathcal{C}^2$ d'une seule variable.

Exercice 2 (sur 3 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Préciser pour chaque point critique si f y admet un maximum local, un minimum local ou un point col (selle).

Exercice 3 (sur 4 points)

Soit le domaine du plan

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\right\},$$

sur lequel on veut calculer l'intégrale

$$I = \int_D 2\left(x + y + \sqrt{(x+y)^2 + 1}\right) dxdy.$$

1. On pose $u = x + y$, $v = x - y$. Déterminer x et y en fonction de u et v et en déduire que ces relations définissent un changement de variable entre le domaine D et le domaine $H = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq u \leq 1, \ -u \leq v \leq u\right\}$.
2. Représenter graphiquement les domaines D et H.
3. Calculer alors l'intégrale I ci-dessus. (On notera qu'une primitive de $u\sqrt{u^2+1}$ est donnée par $\frac{1}{3}(u^2+1)^{3/2}$).

Exercice 4 (sur 5 points)

Soit la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = e^t \cos(t), \ y(t) = e^t \sin(t), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la longueur ℓ_0 de la portion de courbe située entre les points correspondant aux valeurs du paramètre $t = 0$ et $t = t_0 > 0$.
2. Calculer les vecteurs du repère de Frenet $\mathbf{T}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$. (Pour mémoire, $\mathbf{T}(t)$ est le vecteur tangent unitaire orienté dans le sens du paramétrage et $\mathbf{N}(t)$ le vecteur normal principal.)
3. Calculer la courbure $\kappa(t)$ et les coordonnées du centre de courbure $\mathbf{c}(t)$ en tout point $(x(t), y(t))$ de la courbe.