INSA Toulouse. 14 janvier 2013
STPI 2ème année IC

# Contrôle de Mathématiques

**Durée de l'examen : 1h30**

*Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.*

**Exercice 1 (5 points)** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifiant

$$x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = \alpha f(x,y), \ \forall\, (x,y) \neq (0,0) \ \text{ dans } \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

où $\alpha$ est un nombre réel fixé. Pour résoudre cette équation, on passe en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et on pose $g(r,\theta) = f(x,y)$.

1. Calculer $\partial_r g(r,\theta)$ et $\frac{1}{r}\partial_\theta g(r,\theta)$ à l'aide de $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$.
2. Donner l'équation différentielle vérifiée par l'application partielle $r \to g(r,\theta)$ et montrer qu'elle se met sous la forme
$$\partial_r(r^{-\alpha} g(r,\theta)) = r^{-\alpha}\partial_r g(r,\theta) - \alpha r^{-\alpha-1} g(r,\theta) = 0.$$
3. Résoudre l'équation précédente en exprimant sa solution à l'aide d'une fonction arbitraire $\theta \to v\,(\theta)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\theta$.
4. En déduire que toute solution de l'équation (1) vérifie la relation
$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y), \ \forall t > 0, \ \forall\,(x,y) \neq (0,0) \ \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$
(On pourra remarquer –faire un dessin– que les coordonnées polaires $\varrho$ et $\varphi$ de $(tx,ty)$ s'expriment à l'aide de celles $r$ et $\theta$ de $(x,y)$ par $\varrho = tr$ et $\varphi = \theta$.)

**Exercice 2 (6 points)** Le but de l'exercice est de déterminer les points d'extremum de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) - \frac{1}{2}(x-y)^2$$

1. Montrer que tout point critique $(x,y)$ de $f$ vérifie $x + y = 0$. (On pourra utiliser les deux propriétés admises suivantes $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ et $x^2 - xy + y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$.)
2. En déduire que les points critiques de $f$ sont donnés par
$$\left\{\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), (0,0)\right\}.$$
3. Montrer que $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right))$ sont des extrema locaux et préciser à chaque fois s'il s'agit d'un point de minimum ou maximum local. Donnez la valeur de la fonction en ces points.

4. Pourquoi ne peut-on pas conclure comme à la question ci-dessus pour le point $(0,0)$ ? Donner le tableau des variations des fonctions $x \to \varphi(x) = f(x,x)$ et $x \to \psi(x) = f(x,-x)$. Conclusion ?
5. Vérifier que $4f(x,y)+8 = (x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f$ admet-elle des points de minimum ou maximum global ?

Tourner S.V.P.

**Exercice 3 (4 points)** Soit $D$ le domaine du plan défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ \ x^2+y^2 \ge 1\}$.

1. Dessiner le domaine $D$ et calculer son aire.
2. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{[0,1]^2} xy\ dxdy, \quad I_2 = \int_D xy\ dxdy.$$

(On rappelle que $[0,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.)

**Exercice 4 (5 points)** On considère l'arc de courbe donnée par la paramétrisation suivante :

$$x(t) = 2t + \sin(2t) - 4\sin t,$$
$$y(t) = 3 + \cos(2t) - 4\cos t,$$

avec $0 < t < \pi$.

1. Calculer la longueur $\ell$ de cet arc de courbe. (On pourra utiliser les relations trigonométriques suivantes $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ et $1+\cos(2a) = 2\cos^2 a$.)
2. Déterminer le vecteur tangent unitaire $T(t)$, ainsi que le vecteur normal principal $N(t)$ en tout point $M_t$ de cet arc de courbe.
3. Calculer la courbure $\kappa(t)$ en tout point $M_t$ de cet arc de courbe.