I.N.S.A de TOULOUSE 4 mars 2013
Département STPI, 2ème année IC

Rattrapage de Mathématiques

Durée 1h30.

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barême est indicatif.

Exercice 1 (7 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Sans aucun calcul, expliquer pourquoi toutes les valeurs propres de A sont réelles.
2. En admettant que les valeurs propres de A sont 0 et 6, déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_6 associés à ces valeurs propres.
3. Déterminer une base orthonormée dans chacun des sous-espaces E_0 et E_6.
4. En déduire une base orthonormée $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
5. Soit f la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Donner l'expression de $f(v, v')$ pour $v = (x, y, z),\ v' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.
6. Soit q la forme quadratique associée à f. Donner l'expression de $q(v)$, pour tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
7. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$ trouvée à la question 4.
8. Pour $v \in \mathbb{R}^3$, on note (X, Y, Z) les composantes de v dans la base $\mathcal{V}$. Donner l'expression de $q(v)$ en fonction de X, Y et Z.
9. Vérifier si f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Calculer les dérivées partielles et la matrice Hessienne de g en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de g.
3. Déterminer les points d'extremum local de g et préciser leur nature (maximum/minimum).

Exercice 3 (4 points)

On veut résoudre l'équation

$$x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y) = 2 \text{ pour } (x, y) \in D \tag{1}$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$.

Si f est une solution de (1), on définit g sur D par $g(u, v) = f(x, y)$ avec $u = xy$, $v = y/x$.

1. Calculer $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$ à l'aide de $\partial_u g(u, v)$ et de $\partial_v g(u, v)$.
2. Former l'équation vérifiée par g.
3. Résoudre l'équation vérifiée par g et en déduire la solution générale de (1).

Tournez S.V.P. .../...

Exercice 4 (4 points)

On considère les domaines suivants : $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 2\}$,

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y,\ x^2+y^2 \leq 4\}$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 4\}$.

1. Dessiner les domaines C, D et E.
2. Calculer l'aire des domaines C, D et E.
3. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_C (x^2+y^2)dxdy,\ \int_D (x^2+y^2)dxdy,\ \int_E (x^2+y^2)dxdy.$$