INSA Toulouse, STPI, 2A IC 1 mars 2012

Rattrapage de Mathématiques

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 (4 points)
On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

1. Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner l'expression de la forme polaire f associée à q.
3. Montrer que f est un produit scalaire.

Exercice 2 (5 points)
Soit le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$. On cherche toutes les fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation

$$(E) \qquad x\partial_x f(x,y) - y\partial_y f(x,y) = x - y, \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Soit le domaine $H = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 - 4u > 0\}$ et l'application $\phi : D \to H$, définie par $\phi(x,y) = (u,v)$, avec $u = xy, v = x + y$. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est bijective.
2. On effectue le changement de variables: $u = xy,\ v = x + y$, et on pose $g(u,v) = f(x,y)$. Calculer les dérivées partielles de f à l'aide de celles de g.
3. Montrer que f est solution de l'équation (E) si et seulement si g est solution de l'équation $\partial_v g(u,v) = 1$, pour tout $(u,v) \in H$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de (E).

Exercice 3 (3 points)
On considère l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq x^2\}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble D en justifiant les différentes symétries qu'il possède.

2. Calculer l'intégrale double

$$I = \int_D (x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 4 (3 points)
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1.$$

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Déterminer les points d'extremum local de f en spécifiant leur nature (maximum/minimum).

Exercice 5 (5 points)
On considère le paramétrage de l'arc de courbe $\mathcal{C}$ (spirale) donné par

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} x(\theta) = e^\theta \cos\theta \\ y(\theta) = e^\theta \sin\theta \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}(\theta)$ à $\mathcal{C}$ au point $(x(\theta), y(\theta))$ est donné par $\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$, avec α un angle que l'on exprimera en fonction de θ.

   Indication: On pourra utiliser les relations

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Déterminer la longueur de l'arc de courbe $\mathcal{C}$.

3. Calculer la courbure $\kappa(\theta)$ de $\mathcal{C}$ au point $(x(\theta), y(\theta))$.