



Département STPI

IC – 2^{ème} année

UF Maths-Méca

Cours de Mathématiques

A. Bendali & S. Grusea

Toulouse 2013/14

Cours de Mathématiques

A. Bendali & S. Grusea

A. Bendali

Département de génie mathématique

E-mail : abendali@insa-toulouse.fr

S. Grusea

Département de génie mathématique

E-mail : grusea@insa-toulouse.fr

Table des matières

Préface	v
Chapitre 1. Formes bilinéaires et quadratiques	1
1. Définition	1
2. Formes bilinéaires et matrices	2
3. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques	3
Chapitre 2. Espaces euclidiens	5
1. Produit scalaire. Orthogonalité	5
2. Matrices orthogonales	9
3. Matrices symétriques	11
4. Application aux formes quadratiques réelles	13
Chapitre 3. Fonctions de plusieurs variables	17
1. Calcul différentiel	17
2. Intégrales multiples	27
Chapitre 4. Courbes et surfaces	39
1. Courbes	39
2. Courbes en dimension 3	48
3. Surfaces	49
Chapitre 5. Éléments d'analyse vectorielle	55
1. Intégrales curvilignes	55
2. Formules de Green	61
3. Intégrales de surfaces	64

Préface

L'objet de ce cours est d'introduire des notions de base en algèbre, calcul différentiel et intégral et géométrie, indispensables pour aborder la résolution des problèmes qui se posent essentiellement en mécanique des corps rigides et des milieux continus.

Notre but était de présenter ces notions en gardant en vue les deux impératifs suivants :

- ne pas sacrifier la rigueur qui seule permet une connaissance correcte et une utilisation efficace des techniques mathématiques,
- garder, cependant, un aspect pragmatique au cours pour que les abstractions nécessaires ne soient pas un obstacle à son assimilation.

Le bilan des enseignements nous dira si cette tentative a réussi ou s'il y a des points à reprendre de façon différente.

Le contenu du polycopié est trop dense pour les treize séances de cours et le même volume de travaux dirigés qui lui sont dévolus. Certaines démonstrations ne seront donc pas effectuées en cours. Elles sont données dans le but de permettre au lecteur, qui le souhaite, d'approfondir cet enseignement.

Toutes les remarques et suggestions, non seulement sont les bienvenues, mais sont fortement sollicitées.

CHAPITRE 1

Formes bilinéaires et quadratiques

1. Définition

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). Une forme bilinéaire sur E est une application

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

qui satisfait :

$$(1.1) \quad f(ax + bx', y) = af(x, y) + bf(x', y)$$

$$(1.2) \quad f(x, ay + by') = af(x, y) + bf(x, y')$$

pour tout a et $b \in \mathbb{K}$ et pour tout x, y, x' et $y' \in E$. On exprime la condition (1.1) en disant que f est linéaire par rapport à la première variable et la condition (1.2) en disant que f est linéaire par rapport à la deuxième variable.

EXEMPLE 1.1. *Les deux exemples suivants sont fondamentaux.*

(1) *Soient ϕ et σ des formes linéaires sur E . L'application $f : E \times E \rightarrow K$ définie par $f(x, y) = \phi(x)\sigma(y)$ est bilinéaire. La vérification est immédiate à partir de la linéarité de ϕ et de σ .*

(2) *Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$(1.3) \quad f(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i y_j$$

où est une A matrice de $M_N(\mathbb{R})$. On vérifie là aussi directement en utilisant les règles de calcul matriciel que cette application est bilinéaire. D'une certaine façon, c'est le prototype des applications bilinéaires comme nous le verrons ci-dessous. En fait, souvent les formes bilinéaires sont données sous la forme

$$(1.4) \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i y_j$$

On vérifie directement en écrivant

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i y_j = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N a_{Nj} y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

et en identifiant les vecteurs de \mathbb{R}^N à des matrices colonne que (1.4) définit une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^N .

L'ensemble des formes bilinéaires sur E est muni d'une structure d'espace vectoriel en définissant $f + g$ et λf par :

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y), \quad x, y \in E,$$

$$(\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y), \quad x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}.$$

2. Formes bilinéaires et matrices

Nous supposons que E est de dimension finie. Soit f une forme bilinéaire sur E et $\{e_1, \dots, e_N\}$ une base de E .

Soient x et y dans E ; $x = x_1e_1 + \dots + x_Ne_N$ et $y = y_1e_1 + \dots + y_Ne_N$. On peut écrire

$$f(x, y) = f(x_1e_1 + \dots + x_Ne_N, y_1e_1 + \dots + y_Ne_N)$$

$$= x_1y_1f(e_1, e_1) + x_1y_2f(e_1, e_2) + \dots + x_Ny_Nf(e_N, e_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_iy_jf(e_i, e_j)$$

Ainsi f est complètement déterminée par les N^2 valeurs $f(e_i, e_j)$.

La matrice $A = a_{ij}$ (l'indice i est l'indice de ligne et l'indice j l'indice de colonne), avec $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, est la matrice de f dans la base $\{e_i\}_{i=1}^N$.

Si X et Y représentent les vecteurs colonne formés des composantes des vecteurs x et y dans la base $\{e_i\}$ alors :

$$f(x, y) = X^T AY = (X^T AY)^T = Y^T A^T X$$

Dans le second exemple ci-dessus de forme bilinéaire sur \mathbb{R}^N , la matrice A de la formule (1.3) est exactement la matrice de la forme bilinéaire dans la base canonique.

Que se passe-t-il si on fait un changement de base dans E ? Le théorème suivant indique la correspondance entre les matrices assurant la représentation.

THÉORÈME 1.1. *Soit P la matrice de passage d'une base à une autre. Si A est la matrice de f dans la base initiale alors*

$$B = P^T AP$$

est la matrice de f dans la nouvelle base.

Les matrices A et B sont dites alors congruentes .

DÉMONSTRATION. Soit $f(x, y) = X^T AY$ dans la base initiale et $f(x, y) = X'^T BY'$ dans la nouvelle base ;

on a $X = PX'$ et $Y = PY'$ d'où $f(x, y) = (X'^T P^T)A(PY') = X'^T (P^T AP)Y'$. \square

PROPOSITION 1.1. *Deux matrices congruentes ont même rang.*

DÉMONSTRATION. Deux matrices congruentes sont liées par la relation $B = P^T AP$ où P est une matrice inversible. Le rang d'une matrice étant invariant si on la multiplie à gauche ou à droite par une matrice inversible, on obtient ainsi la seconde partie du théorème. \square

DÉFINITION 1.1. *Le rang d'une forme bilinéaire noté $\text{rang}(f)$ est le rang de toute matrice représentant f .*

3. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

DÉFINITION 1.2. Une forme bilinéaire f est dite symétrique si :

$$f(x, y) = f(y, x), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Conséquences : Si E est de dimension finie et si A est une représentation matricielle de f , on a $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$; d'où $A^T = A$ et donc que A est symétrique.

Réciproquement, la forme bilinéaire

$$f(x, y) = x^T A y, \quad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

associée à une matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ est symétrique si A est symétrique.

DÉFINITION 1.3. On dit que q , application de E dans \mathbb{K} est une forme quadratique sur E si :

- (1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$,
- (2) L'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$ est une forme bilinéaire.

On dit aussi que f est la forme polaire de q .

EXEMPLE 1.2. Le système masses ressorts suivant constitue un modèle permettant l'étude par analogie de beaucoup de problèmes de dynamique en mécanique des structures. La fonction $x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, correspond à la position à l'instant t , repérée le long d'un axe des abscisses, de la masse m_i . Les constantes k_i , $i = 1, \dots, N+1$ désignent les coefficients de raideur des différents ressorts. On note par E l'ensemble des vecteurs

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$$

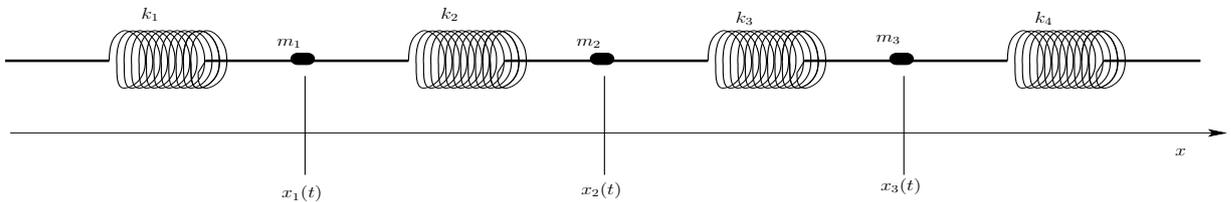
dont les composantes sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 de t . On montrera à titre d'exercice que l'énergie potentielle des ressorts

$$\mathcal{E}(x(t)) = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2 + \dots + k_N (x_N(t) - x_{N-1}(t))^2 + k_{N+1} x_N^2(t))$$

et l'énergie cinétique

$$\mathcal{U}(x(t)) = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2(t) + \dots + m_N \dot{x}_N^2(t))$$

sont des formes quadratiques sur E .



3.1. Propriétés fondamentales.

- (1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
permet de connaître $q(\lambda x)$ dès que l'on connaît $q(x)$.
- (2) $q(x+y) - q(x-y) = 4f(x, y)$ et $q(x+y) - q(x) - q(y) = 2f(x, y)$
permettent de revenir à la forme bilinéaire.

(3) $q(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 q(x) + 2\lambda\mu f(x, y) + \mu^2 q(y)$
est une forme quadratique par rapport à (λ, μ) .

THÉORÈME 1.2. *L'application q de E dans \mathbb{K} qui à x de E , associe l'élément de \mathbb{K} défini par :*

$$q(x) = f(x, x)$$

est une forme quadratique. Elle est appelée forme quadratique engendrée par la forme bilinéaire symétrique f .

DÉMONSTRATION. La démonstration découle directement de la définition. □

3.2. Représentation matricielle d'une forme quadratique. Si E est de dimension finie, une représentation matricielle de q sera celle de la forme bilinéaire associée

$$q(x) = f(x, x) = X^T A X \quad \text{avec } A \text{ symétrique.}$$

3.3. Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.4. *On dit que q est positive si $q(x) \geq 0 \forall x \in E$
On dit que q est définie si $q(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

CHAPITRE 2

Espaces euclidiens

Nous limiterons cet exposé au cas des espaces vectoriels réels.

1. Produit scalaire. Orthogonalité

1.1. Produit scalaire. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique sur E , dont la forme quadratique associée est définie positive.

On le note $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y$ pour x et y des éléments de E .

1.2. Propriétés. Les propriétés suivantes résultent directement de la définition

$$\begin{cases} \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, & \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } E, \\ \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, & \text{pour tout } x, x' \text{ et } y \text{ dans } E, \\ \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, & \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } E \text{ et tout } \lambda \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \langle x, x \rangle \geq 0, & \text{pour tout } x \text{ dans } E, \\ \langle x, x \rangle = 0 & \text{pour } x \in E \text{ si et seulement si } x = 0. \end{cases}$$

REMARQUE 2.1. Si F est un sous-espace vectoriel de E , le produit scalaire de E induit un produit scalaire sur F .

1.3. Espace préhilbertien - Espace euclidien. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien réel.

Si E est un espace préhilbertien de **dimension finie**, il est appelé **espace euclidien**.

1.4. Norme euclidienne. On appelle norme euclidienne sur un espace vectoriel réel l'application associée à un produit scalaire par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

EXEMPLE 2.1. Les exemples suivants décrivent des situations souvent rencontrées en pratique.

- (1) L'exemple suivant est particulièrement fondamental. On montrera à titre d'exercice que l'espace \mathbb{R}^N est un espace euclidien pour le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N.$$

En identifiant les éléments de \mathbb{R}^N à des vecteurs colonne (ce qu'on fera de façon implicite dans toute la suite)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},$$

le produit scalaire peut être défini à l'aide du produit matriciel

$$\langle x, y \rangle = x^T y.$$

Dans le cas où $N = 2$ ou $N = 3$, le produit scalaire ci-dessus est le produit scalaire défini géométriquement lorsqu'on identifie les vecteurs du plan ou de l'espace au vecteur colonne formé par leurs composantes dans un repère orthonormé.

- (2) On montrera aussi à titre d'exercice que l'ensemble E des fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a, b]$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

- (3) L'espace $\mathbb{R}_N[x]$ des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq N$, est un sous-espace de l'espace préhilbertien E ci-dessus. Il est donc un espace euclidien pour le produit scalaire induit.

1.5. Propriétés de la norme euclidienne. L'inégalité suivante est fondamentale.

THÉORÈME 2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit E un espace préhilbertien. On a alors*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } E.$$

DÉMONSTRATION. Si $x = 0$ ou $y = 0$, il n'y a rien à démontrer puisque les deux membres sont nuls. Dans le cas contraire, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 1 \pm \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= 1 \pm \frac{1}{\|x\| \|y\|} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer qu'une norme euclidienne est **une norme**, c'est à dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes qui sont analogues à celles de la valeur absolue sur \mathbb{R} :

- (1) positivité stricte

$$\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E, \quad \text{et } \|x\| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0_E ;$$

- (2) homogénéité

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \text{pour tout } x \text{ dans } E \text{ et tout } \lambda \text{ dans } \mathbb{R} ;$$

- (3) inégalité triangulaire

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } E.$$

On démontre ces propriétés sous la forme du théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit E un espace préhilbertien réel. Sa norme euclidienne est une norme.*

DÉMONSTRATION. Les propriétés 1. 2. sont la conséquence directe de la définition d'une norme euclidienne.

En utilisant la définition d'une norme euclidienne, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 ;$$

d'où le résultat en passant aux racines carrées. □

Un espace vectoriel E muni d'une norme est un espace normé. Elle lui confère alors d'importantes propriétés. On a tout d'abord une **notion de limite**.

DÉFINITION 2.1. Soit E un espace vectoriel réel muni d'une norme notée $\|\cdot\|$. On dit que la suite de points de E , $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ **converge** vers le point a de E si la suite numérique $\{\|x_n - a\|\}_{n \geq n_0}$ tend vers 0, c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| = 0.$$

PROPOSITION 2.1. Si une suite $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ d'un espace normé E admet une limite a , cette limite est **unique**.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ tend vers une autre limite a' , c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a'\| = 0.$$

On alors en utilisant l'inégalité triangulaire

$$0 \leq \|a - a'\| = \|(a - x_n) + (x_n - a')\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - a'\|$$

et en passant à la limite sur le dernier membre

$$0 \leq \|a - a'\| = 0.$$

Il s'ensuit que $a - a' = 0_E$ et donc $a = a'$. □

L'importance des espaces euclidiens par rapport aux espaces préhilbertiens généraux vient des deux propriétés suivantes, qui généralisent les propriétés analogues dans \mathbb{R} , et qui sont toujours vérifiées si l'espace normé est de **dimension finie**. Elles sont admises ici.

THÉORÈME 2.3. Soit E est un espace normé de dimension finie, alors

- (1) Toute suite de Cauchy, c'est à dire telle que $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$, est convergente.
- (2) De toute suite $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ bornée, (c'est à dire telle que la suite numérique $\{\|x_n\|\}_{n \geq n_0}$ est bornée), on peut extraire une sous-suite convergente.

1.6. Orthogonalité. L'importance des espaces préhilbertiens par rapport aux espaces normés quelconques vient du fait qu'on peut y définir une notion d'orthogonalité.

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, c'est à dire s'ils vérifient

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

THÉORÈME 2.4. Le seul vecteur orthogonal à tous les autres d'un espace préhilbertien E est le vecteur 0_E (vecteur zéro de E).

DÉMONSTRATION. Si x est orthogonal à tout y il est orthogonal à lui même ; et donc $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$. Ce qui équivaut à $x = 0$. □

THÉORÈME 2.5 (Théorème de Pythagore). Soit E un espace préhilbertien ; alors,

$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ si et seulement si } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

DÉMONSTRATION. On obtient directement le résultat en écrivant $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$. □

1.7. Systèmes orthonormés.

DÉFINITION 2.2. Un système de vecteurs $\{e_i\}_{i \in I}$ extraits de E est dit orthogonal si deux vecteurs quelconques sont orthogonaux, c'est à dire

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ si } e_i \neq e_j.$$

Ce système est orthonormé si il est orthogonal et si chaque vecteur est unitaire (ou normé), c'est à dire

$$\|e_i\| = 1, \quad \forall i \in I.$$

THÉORÈME 2.6. Tout système orthogonal $\{e_i\}_{i \in I}$ d'un espace préhilbertien E , qui ne contient pas 0_E , est libre.

DÉMONSTRATION. Soient $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ un sous système fini de $\{e_i\}_{i \in I}$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels tels que

$$\lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_m e_{i_m} = 0_E.$$

On d'abord

$$\langle \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_m e_{i_m}, e_{i_k} \rangle = \lambda_{i_1} \langle e_{i_1}, e_{i_k} \rangle + \dots + \lambda_{i_m} \langle e_{i_m}, e_{i_k} \rangle.$$

Dans le second membre seul le terme $\langle e_{i_k}, e_{i_k} \rangle = \|e_{i_k}\|^2 \neq 0$ car $0_E \neq e_i, \forall i \in I$. Il vient donc

$$\langle \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_m e_{i_m}, e_{i_k} \rangle = \lambda_k \|e_{i_k}\|^2.$$

Comme d'autre part

$$\langle \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_m e_{i_m}, e_{i_k} \rangle = \langle 0_E, e_{i_k} \rangle = 0,$$

on obtient $\lambda_k \|e_{i_k}\|^2 = 0$. Ce qui entraine que $\lambda_k = 0$. □

1.8. Produit scalaire et norme dans une base orthonormée. On se limite dans la suite pour simplifier à des espaces euclidiens E qu'on suppose être de dimension N .

Soit $\{e_i\}_{i=1}^{i=N}$ une famille orthonormée de E . Le théorème précédent montre qu'elle est libre : c'est donc **une base** de E . On dit que c'est **une base orthonormée** de E .

L'intérêt des bases orthonormées vient du fait que l'application de E dans \mathbb{R}^N qui à $x = \sum_{i=1}^{i=N} x_i e_i$ associe le vecteur colonne formé des composantes de x permet non seulement d'identifier E à \mathbb{R}^N mais conserve le produit scalaire. On a plus précisément

$$x = \sum_{i=1}^{i=N} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{i=N} y_i e_i$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

La norme dans E s'exprime alors à partir de la norme dite euclidienne de \mathbb{R}^N :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2}$$

A partir d'une base quelconque $\{u_i\}_{i=1}^{i=N}$, on peut toujours construire une base orthonormée. Le procédé qui permet de le faire est le procédé de Gram-Schmidt.

Procédé de Gram-Schmidt.

- (1) $e_1 = u_1 / \|u_1\|$
- (2) On suppose que e_1, e_2, \dots, e_{k-1} ont été construits et engendrent u_1, u_2, \dots, u_{k-1} ,
- (a) on définit

$$\tilde{e}_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, e_j \rangle e_j.$$

- (b) On vérifie que \tilde{e}_k est orthogonal à e_1, e_2, \dots, e_{k-1}

$$\begin{aligned} \langle \tilde{e}_k, e_i \rangle &= \left\langle u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, e_j \rangle e_j, e_i \right\rangle \\ &= \langle u_k, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \langle u_k, e_i \rangle - \langle u_k, e_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

- (c) On vérifie que $\tilde{e}_k \neq 0$ et on le normalise. Si $\tilde{e}_k = 0$, $u_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, e_j \rangle e_j$ et donc u_k serait engendré par e_1, e_2, \dots, e_{k-1} et, par suite, par u_1, u_2, \dots, u_{k-1} . Ceci entraîne une contradiction avec le fait que $\{u_i\}_{i=1}^N$ est une base. On peut donc poser

$$e_k = \tilde{e}_k / \|\tilde{e}_k\|.$$

- (d) On vérifie que e_1, e_2, \dots, e_k engendrent u_1, u_2, \dots, u_k . Il suffit de vérifier que e_1, e_2, \dots, e_k engendrent u_k . Or de l'égalité ci-dessus définissant \tilde{e}_k , on déduit

$$u_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, e_j \rangle e_j + \|\tilde{e}_k\| e_k;$$

ce qui exprime exactement que e_1, e_2, \dots, e_k engendrent u_k .

2. Matrices orthogonales

2.1. Définition.

THÉORÈME 2.7 (Définition). *Soit S une matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) $S^T S = I$

(2) $S S^T = I$

(3) $S^T = S^{-1}$

Une matrice, satisfaisant à l'une des trois conditions précédentes, est dite orthogonale.

DÉMONSTRATION. Immédiate grace à l'unicité de l'inverse à gauche ou à droite. \square

2.2. Propriétés. On les résume dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (1) *Une matrice S est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonne forment une base orthonormée de \mathbb{R}^N . Une matrice carrée S de $M_N(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si sa transposée S^T est orthogonale, ou encore ses vecteurs lignes forment une base orthonormée de \mathbb{R}^N .*
- (2) *Si une matrice carrée S de $M_N(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors $(\det S)^2 = 1$ (mais toute matrice de déterminant 1 ou -1 **n'est pas forcément orthogonale**).*
- (3) *L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre N constitue un groupe unitaire, d'élément unité la matrice unité I pour la multiplication matricielle.*
- (4) *Les valeurs propres réelles de S ne peuvent être que $+1$ et -1 .*

DÉMONSTRATION. La seule propriété non évidente est la propriété (4). Soit $x \neq 0$ dans \mathbb{R}^N tel que

$$Sx = \lambda x.$$

On a donc

$$(Sx)^T Sx = \lambda (Sx)^T x = \lambda x^T Sx = \lambda^2 \|x\|^2.$$

Mais

$$(Sx)^T Sx = x^T S^T Sx = x^T I x = \|x\|^2.$$

Comme $\|x\|^2 \neq 0$, il vient $\lambda^2 = 1$; d'où la propriété puisque λ est réel. \square

THÉORÈME 2.8. *Dans un espace euclidien, une matrice de passage transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée si et seulement si elle est orthogonale.*

DÉMONSTRATION. Immédiate en utilisant la première propriété. \square

DÉFINITION 2.3. *Si E est un espace euclidien. Un automorphisme T de E , (c'est à dire une bijection, linéaire de E dans E), est une isométrie de E s'il conserve le produit scalaire, c'est à dire si*

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 2.3. *L'ensemble $O(E)$ des isométries de E est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle le groupe linéaire de E .*

Il y a un lien étroit entre $O(E)$ et les matrices orthogonales.

THÉORÈME 2.9. *Soit une base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^{i=N}$ de E . L'application qui, à une isométrie T , associe sa matrice $[T]$ dans la base $\{e_i\}_{i=1}^{i=N}$ est un isomorphisme de groupe entre $O(E)$ et le groupe des matrices orthogonales de $M_N(\mathbb{R})$.*

DÉMONSTRATION. Par définition de la matrice associée, on a

$$T(x) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N T_{ij} x_j \right) e_i, \quad x = \sum_{j=1}^N x_j e_j,$$

c'est à dire que les composantes de $T(x)$ sont données par le vecteur colonne $[T][x]$ avec

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & \cdots & T_{NN} \end{bmatrix}, \quad [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},$$

et la transformation est un homomorphisme de groupe. Le lien entre le produit scalaire de E et celui de \mathbb{R}^N donne pour tout $x, y \in E$

$$\begin{aligned}\langle T(x), T(y) \rangle &= ([T][x])^T [T][y] = [x]^T [y] = \langle x, y \rangle \\ &= [x]^T [T]^T [T][y]\end{aligned}$$

Les relations entre une forme quadratique et la forme bilinéaire associée donnent alors

$$[T]^T [T] = I$$

et donc que $[T]$ est une matrice orthogonale. Les relations précédentes permettent d'affirmer que, réciproquement, à toute matrice orthogonale $[T]$, on peut associer une isométrie. \square

Comme le déterminant $\det T$ d'un endomorphisme T de E peut être défini sans équivoque par celui de la matrice qui lui est associée dans une base quelconque, il vient ainsi que

$$\det T = \pm 1.$$

Il est immédiat que le sous-ensemble $SO(E)$, appelé groupe spécial de E , formé des isométries T vérifiant $\det T = 1$ est un sous-groupe de $O(E)$. Pour $E = \mathbb{R}^3$, $SO_3 = SO(\mathbb{R}^3)$ joue un rôle extrêmement important, particulièrement en mécanique pour décrire les déplacements de corps rigides : c'est le **groupe des rotations**.

3. Matrices symétriques

3.1. Définition. Rappelons qu'une matrice carrée A dans $M_N(\mathbb{R})$ est symétrique si ses coefficients A_{ij} vérifient

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Autrement dit, A est symétrique si elle est égale à sa transposée

$$A = A^T.$$

On vérifie immédiatement la propriété suivante : A est symétrique si et seulement si

$$x^T Ay = y^T Ax, \quad \text{pour tout } x, y \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Il suffit pour cela d'écrire : $x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x$.

PROPOSITION 2.4. *Dans un changement de bases orthonormées, une matrice symétrique est semblable à une autre matrice symétrique.*

DÉMONSTRATION. Soit S la matrice de passage d'une base à une autre. Elle est donc orthogonale. On a ainsi

$$A' = S^{-1}AS = S^T AS$$

et par suite $A'^T = [S^T AS]^T = S^T A^T S = A'$ car $A^T = A$ \square

3.2. Valeurs et vecteurs propres d'une matrice symétrique.

THÉORÈME 2.10. *Les valeurs propres d'une matrice symétrique $A \in M_N(\mathbb{R})$ sont toutes réelles.*

DÉMONSTRATION. On part de la remarque suivante : si A est une matrice à coefficients réels dans $M_N(\mathbb{R})$ et x , un vecteur colonne à N composantes éventuellement complexes

$$\overline{Ax} = A\bar{x}$$

Supposons maintenant que λ est une valeur propre de A et x est un vecteur propre, éventuellement à composantes complexes qui lui est associé. On a alors

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda} \bar{x}$$

autrement dit, $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A de vecteur propre associé \bar{x} . Supposons maintenant que A est symétrique. On a

$$\begin{aligned} x^T \overline{Ax} &= x^T \bar{\lambda} x = \bar{\lambda} x^T x = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \\ x^T \overline{Ax} &= \overline{x^T Ax} = \overline{x^T A^T x} = \overline{x^T Ax} = \overline{\lambda x^T x} = \lambda \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \end{aligned}$$

et donc $\lambda = \bar{\lambda}$. □

THÉORÈME 2.11. *Pour toute matrice symétrique, deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Soient x et y deux vecteurs propres associés respectivement à λ et μ distinctes. On peut supposer d'après le théorème précédent que tous ces éléments sont réels. On a

$$\begin{aligned} (Ax)^T y &= \lambda x^T y \\ &= x^T A^T y = x^T Ay = \mu x^T y. \end{aligned}$$

Il en résulte que $(\lambda - \mu)x^T y = 0$ et donc $x^T y = 0$ puisque $\lambda - \mu \neq 0$. □

On déduit des résultats précédents.

THÉORÈME 2.12. *Toute matrice A , symétrique, réelle, d'ordre N , admet N valeurs propres réelles distinctes ou confondues. En les comptant avec leur ordre de multiplicité, on peut les ordonner en une suite croissante à N termes*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N.$$

3.3. Diagonalisation d'une matrice symétrique. On commence par le lemme suivant dont on pourra admettre la démonstration en première lecture.

LEMME 2.1 (théorème de Schur). *Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$, une matrice symétrique. Alors, il existe une matrice orthogonale U telle que*

$$U^T A U = D$$

où D est une matrice diagonale formée des valeurs propres ordonnées comme dans le théorème ci-dessus. Autrement dit, une matrice symétrique est diagonalisable dans \mathbb{R} par une base orthonormée de \mathbb{R}^N .

DÉMONSTRATION. La démonstration est par récurrence sur l'ordre N de la matrice. Le théorème est évident pour $N = 1$.

Supposons qu'il soit vrai pour toutes les matrices d'ordre $N - 1$ avec $N \geq 2$. Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ symétrique ; le théorème 2.10 montre qu'il existe alors $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $e_1 \in \mathbb{R}^N$, qu'on peut supposer de norme 1, tels que

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Le théorème de la base incomplète et le procédé de Gram-Schmidt permettent alors d'affirmer qu'on peut compléter e_1 en une base orthonormée e_1, \dots, e_N de \mathbb{R}^N . Notons par Q la matrice dont les vecteurs colonne sont donnés par les composantes de e_1, \dots, e_N dans la base canonique. On a donc

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & w^T \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

où w est un vecteur colonne de \mathbb{R}^{N-1} et C une matrice dans $M_{N-1}(\mathbb{R})$. Mais comme A est symétrique, on a

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ w & C^T \end{bmatrix} = (Q^T A Q)^T = Q^T A^T Q = Q^T A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & w^T \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

qui montre que $w = 0$ et $C = C^T$. Comme toute valeur propre μ de C , correspondant à un vecteur propre $y \in \mathbb{R}^{N-1}$, est une valeur propre de A suite aux relations

$$\begin{aligned} Q^T A Q \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C y \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\ A Q \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} &= \mu Q \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une matrice orthogonale $Q_{N-1} \in M_{N-1}(\mathbb{R})$ telle que

$$Q_{N-1}^T C Q_{N-1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

On vérifie directement alors que la matrice

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{N-1} \end{bmatrix} Q$$

est telle que

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & Q_{N-1}^T C Q_{N-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

□

4. Application aux formes quadratiques réelles

4.1. Réduction des formes quadratiques.

THÉORÈME 2.13. *Soit q une forme quadratique sur un espace euclidien E . Alors, il existe une base orthonormée u_1, \dots, u_N dans laquelle q est de la forme*

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_N y_N^2, \quad \text{si } x = y_1 u_1 + \cdots + y_N u_N.$$

DÉMONSTRATION. Soit e_1, \dots, e_N une base orthonormée de E . On sait qu'il existe une matrice symétrique A telle que

$$q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N.$$

Le théorème précédent montre qu'il existe une matrice orthogonale U telle que

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

On a alors

$$q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} U^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}.$$

Posons

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = U^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \text{ou encore} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_N y_N^2.$$

La fin de la démonstration résulte du fait qu'une matrice de passage orthogonale transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée. \square

4.2. Matrices symétriques définies positives.

DÉFINITION 2.4. Une matrice A dans $M_N(\mathbb{R})$ symétrique est dite définie positive si la forme quadratique q qui lui est associée est définie et positive, c'est à dire si

$$x^T A x > 0, \quad \forall x \text{ non nul dans } \mathbb{R}^N.$$

On a alors la caractérisation suivante.

THÉORÈME 2.14. Une matrice A dans $M_N(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

DÉMONSTRATION. Les résultats précédents montrent qu'il existe une matrice orthogonale U telle que

$$U^T A U = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Pour $y \in \mathbb{R}^N$, on pose $x = Uy$. Comme U est inversible, x est non nul si et seulement si y est non nul. On a donc

$$x^T A x = y^T U^T A U y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_N y_N^2.$$

Si A est définie positive, en prenant pour y le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la i -ème qui vaut 1, on a

$$0 < x^T A x = \lambda_i.$$

Réciproquement si toutes les valeurs propres de A sont > 0 , on a

$$\begin{aligned} x^T A x &= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_N y_N^2 \\ &\geq \lambda_1 (y_1^2 + \cdots + y_N^2) = \lambda_1 y^T y = \lambda_1 y^T U^T U y \\ &= \lambda_1 x^T x = \lambda_1 \|x\|^2 > 0 \text{ si } x \neq 0. \end{aligned}$$

□

CHAPITRE 3

Fonctions de plusieurs variables

1. Calcul différentiel

1.1. Notion de fonction de plusieurs variables. Plusieurs formules en physique ou en ingénierie s'expriment à l'aide de deux ou de plusieurs variables réelles :

- aire A d'un triangle : $A = \frac{1}{2}bh$, b : base, h : hauteur,
- volume V d'une boîte parallélépipédique : $V = L\ell h$, L : longueur, ℓ : largeur, h : hauteur,
- moyenne \bar{x} de N variables x_1, x_2, \dots, x_N : $\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + \dots + x_N)$.

On dit que

- A est une fonction des 2 variables b et h ,
- V est une fonction des 3 variables L , ℓ et h ,
- \bar{x} est une fonction des N variables x_1, x_2, \dots, x_N .

On est amené ainsi à considérer la notion suivante.

DÉFINITION 3.1. *Une fonction de N variables réelles x_1, x_2, \dots, x_N est une règle qui permet d'associer à tout système de N nombres réels contenu dans un sous-ensemble D de \mathbb{R}^N un nombre réel et un seul*

$$z = f(x_1, \dots, x_N).$$

Dans la suite nous limiterons l'exposé aux fonctions de deux variables et donnerons les indications permettant de traiter le cas de trois variables ou plus lorsque cela ne sera pas immédiat.

Nous pourrions utiliser un seul symbole $x = (x_1, x_2)$ pour désigner deux variables ou $x = (x_1, \dots, x_N)$ pour désigner N variables afin d'alléger les notations.

1.2. Notions élémentaires de topologie sur \mathbb{R}^N .

1.2.1. *Rappels de topologie sur \mathbb{R} .* L'étude des fonctions $z = f(x)$, d'une variable réelle x à valeurs réelles, a montré l'importance du rôle joué par la structure des sous-ensembles de \mathbb{R} :

- **Intervalle ouvert** : $]a, b[$,
- **Intervalle fermé** : $[a, b]$,
- **Intervalle fermé et borné** : intervalle fermé et $-\infty < a < b < +\infty$.

Par exemple, si f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, alors les deux problèmes d'optimisation

$$\begin{cases} x_m \in [a, b], \\ f(x_m) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b], \end{cases} \quad \begin{cases} x_M \in [a, b], \\ f(x_M) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b], \end{cases}$$

possèdent chacun au moins une solution. De même, toujours si f est continue sur un intervalle I quelconque, borné ou non, fermé ou non, l'équation

$$\begin{cases} s \in I, \\ f(s) = \ell, \end{cases}$$

admettra une solution si on peut encadrer ℓ par deux valeurs prises par la fonction f , c'est-à-dire si on peut trouver α et β dans I tels que

$$f(\alpha) \leq \ell \leq f(\beta).$$

Le but des notions de topologie qui suivent est de caractériser les sous-ensembles de \mathbb{R}^N qui possèdent une structure analogue donnant lieu aux mêmes propriétés. Cependant, le passage en dimension supérieure à 1 complique considérablement la géométrie des sous-ensembles qui ne peuvent être traités par une description aussi simple. C'est pourquoi, nous commençons par caractériser les structures précédentes d'intervalle ouvert, fermé, borné de façon équivalente afin de pouvoir étendre ces notions à des sous-ensembles de \mathbb{R}^N .

À la base de cette description se trouve la valeur absolue. On peut dire qu'un sous-ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}$ est **borné** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$|x| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

De même, on peut dire que A est **ouvert** si : $\forall x \in A$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$B_\eta(x) := \{y \in \mathbb{R}; |x - y| < \eta\} \subset A.$$

Un point x ayant la propriété précédente est un **point intérieur** à A . On peut donc dire qu'un ensemble est ouvert si chacun de ses points est un point intérieur.

De même, $A \subset \mathbb{R}$ sera **fermé** s'il est stable par les passages à la limite, c'est-à-dire si toute suite de points $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ contenue dans A et convergente, a nécessairement sa limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dans A . Plus généralement, l'adhérence \bar{A} (ou la fermeture) de A est formée des limites de suites de points contenus dans A . Autrement dit, A sera fermé s'il coïncide avec son adhérence \bar{A} .

La **frontière** de A est constituée par les points, appartenant à \bar{A} et qui ne sont pas des points intérieurs de A . Si A est un intervalle, sa frontière est constituée de ses **bornes finies**.

Enfin, les intervalles I sont les sous-ensembles **connexes** de \mathbb{R} . Ce sont les ensembles constitués d'*un seul tenant*, c'est à dire tels que on peut passer d'un point $x \in I$ à un point $y \in I$ de façon continue en restant dans I . Ceci revient à dire ici que $[x, y] \subset I$ dès que $x, y \in I$.

1.2.2. *Éléments de topologie sur \mathbb{R}^N .* Toutes les notions précédentes, sauf la connexité, s'étendent à un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ en remplaçant la valeur absolue par la norme euclidienne

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

DÉFINITION 3.2. *On rappelle qu'une suite de points $\{x^{(n)}\}_{n \geq n_0}$ (avec $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_N^{(n)})$) tend vers $y = (y_1, \dots, y_N)$ si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - y\| = 0.$$

On peut vérifier qu'une suite de points $\{x^{(n)}\}_{n \geq n_0}$ tend vers $y = (y_1, \dots, y_N)$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = y_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

DÉFINITION 3.3. *Un point x est intérieur à A s'il existe $\eta > 0$ tel que*

$$B_\eta(x) := \{y \in \mathbb{R}; \|x - y\| < \eta\} \subset A.$$

Le sous-ensemble $B_\eta(x)$ est la boule ouverte centrée en x et de rayon η .

Le sous-ensemble A est **ouvert** si chacun de ses points est un point intérieur.

L'adhérence (ou la fermeture) \overline{A} de A est l'ensemble des limites des suites de points contenues dans A .

Le sous-ensemble A est **fermé** s'il est égal à son adhérence.

La frontière de A est formée de tous les points dans \overline{A} qui ne sont pas des points intérieurs de A , autrement dit, un point x appartient à la frontière de A si **toute** boule $B_\eta(x)$ contient au moins un point de A et un point dans le complémentaire $\mathbb{R}^N \setminus A$ de A .

Le sous-ensemble A est **borné** s'il existe un nombre réel M tel que

$$\|x\| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

Le sous-ensemble A est **compact** s'il est fermé et borné.

REMARQUE 3.1. On peut utiliser, de façon équivalente dans les définitions précédentes, la boule fermée $\overline{B}_\eta(x)$ obtenue en prenant l'inégalité dans la caractérisation des points de $B_\eta(x)$ à la place de cette dernière.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass se généralise directement aux ensembles compacts de \mathbb{R}^N .

THÉORÈME 3.1 (Bolzano-Weierstrass). Soit A un sous-ensemble **compact** de \mathbb{R}^N . De toute suite $\{x^{(n)}\}_{n \geq n_0} \subset A$, on peut extraire une sous-suite $\{x^{(n_k)}\}_{k \geq 0}$ convergente vers un point de A .

DÉMONSTRATION. Le sous-ensemble A , étant compact, est borné : il existe donc M

$$\|x\| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

La suite $\{x^{(n)}\}_{n \geq n_0}$ est donc une suite bornée de l'espace euclidien \mathbb{R}^N . On peut donc extraire de cette suite une sous-suite $\{x^{(n_k)}\}_{k \geq 0}$ convergente vers x . Le sous-ensemble A , étant compact, est fermé. Le point x est donc dans A . Ceci termine la démonstration du théorème. \square

1.3. Limites et continuité.

1.3.1. Définitions.

DÉFINITION 3.4. La fonction $y = f(x)$ tend vers L lorsque $x := (x_1, x_2)$ tend vers $a := (a_1, a_2)$ si la limite de $f(x)$ est égale à L lorsque $\|x - a\|$ tend vers 0, autrement dit lorsque x_1 tend vers a_1 et x_2 tend vers a_2 **de façon indépendante**.

On dit que f est **continue au point** a si $L = f(a)$.

On dit que f est **continue sur** $D \subset \mathbb{R}^2$, et on note $f \in \mathcal{C}^0(D)$ si f est continue en tout point $x \in D$.

Les théorèmes sur les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, etc,... restent valables pour les fonctions de plusieurs variables. Ils permettent ainsi de s'assurer que des fonctions d'expressions compliquées sont continues à partir de la continuité de fonctions plus simples.

EXEMPLE 3.1. On a ainsi

- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ est continue en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 ,

– $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ est continue en tout point de l'ensemble

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \geq 0\}$$

qui est l'ensemble des points sur et au dessus de la seconde diagonale du plan cartésien,

– $f(x, y, z) = xyz/(x^2 + y^2 + z^2)$ est continue en tout point de l'espace \mathbb{R}^3 où elle est définie, c'est-à-dire en tout point (x, y, z) différent de l'origine $(0, 0, 0)$.

REMARQUE 3.2. Il y a un point dans la définition précédente qui peut passer inaperçu de prime abord mais qui généralement **complique considérablement le passage de l'étude des fonctions d'une variable à celles à plusieurs variables** : les variables x_1 et x_2 doivent tendre respectivement vers a_1 et a_2 **indépendamment l'une de l'autre**. Par exemple, la fonction $v = xy/(x^2 + y^2)$ tend vers 0 lorsque x et y tendent tous les deux vers 0 **en restant sur la parabole** $\{y = x^2\}$. (En effet, dans ce cas : $v = x^3/(x^2 + x^4) = x/(1 + x^2)$ et a pour limite 0.) Cependant, si x et y tendent vers 0 en restant sur la droite $\{y = mx\}$, v garde une valeur constante $v = mx^2/(x^2 + m^2x^2) = m/(1 + m^2)$. Comme $m/(1 + m^2) \neq 0$ pour $m \neq 0$, la fonction a donc plusieurs limites suivant la façon dont (x, y) tend vers 0. Elle n'admet donc pas de limite au point $(0, 0)$.

1.3.2. *Applications.* Les résultats concernant les deux problèmes d'optimisation s'étendent directement aux fonctions à N variables réelles.

THÉORÈME 3.2. Soient A un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^N et $f \in \mathcal{C}^0(A)$. Alors, chacun des deux problèmes d'optimisation

$$\begin{cases} x_m \in A, \\ f(x_m) \leq f(x), \quad \forall x \in A, \end{cases} \quad \begin{cases} x_M \in A, \\ f(x_M) \geq f(x), \quad \forall x \in A, \end{cases}$$

admet au moins une solution.

DÉMONSTRATION. Laissée à titre d'exercice pour consolider les notions de topologie. \square

Nous pouvons maintenant étendre la notion de connexité aux sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}^N$

DÉFINITION 3.5. Le sous-ensemble A de \mathbb{R}^N sera connexe si pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$, on peut trouver une application

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

vérifiant $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $\gamma(t) \in A$, $\forall t \in [0, 1]$ et les coordonnées de $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ sont toutes des fonctions continues de t .

Les sous-ensembles connexes et, en outre, fermés ou ouverts étendent la notion d'intervalle de \mathbb{R} . On les appelle des **domaines** en précisant au besoin s'ils sont fermés ou ouverts.

On peut alors étendre le théorème d'existence de solution donné ci-dessus pour les fonctions d'une variable réelle.

THÉORÈME 3.3 (Théorème des valeurs intermédiaires). Soient A un sous-ensemble connexe de \mathbb{R}^N et $f \in \mathcal{C}^0(A)$. le problème

$$\begin{cases} x \in A, \\ f(x) = \ell, \end{cases}$$

admet (au moins) une solution s'il existe a et b dans A tels que

$$f(a) \leq \ell \leq f(b).$$

DÉMONSTRATION. Comme A est connexe, on peut trouver $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ telle que les fonctions coordonnées de $\gamma : \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ sont continues et $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Posons $\varphi(t) := f(\gamma(t))$. On vérifie directement que φ est une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Comme $\varphi(0) = f(a) \leq \ell \leq f(b) = \varphi(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions d'une variable donne : il existe s , $0 \leq s \leq 1$, tel que $\varphi(s) = f(\gamma(s)) = \ell$. Clairement, $x = \gamma(s)$ est la solution cherchée. \square

1.4. Dérivées partielles et différentielle.

1.4.1. Définitions et théorèmes.

DÉFINITION 3.6. Soit $v = f(x, y)$ une fonction de 2 variables. Fixons $y = y_0$. Si la fonction d'une variable $v = f(x, y_0)$ est dérivable au point x_0 on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable au point (x_0, y_0) . De façon classique, cette dérivée partielle est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Dans ce cours, on utilisera la notation $\partial_x f(x_0, y_0)$. On définit de même lorsque cela est possible $\partial_y f(x_0, y_0)$.

Les dérivées partielles se calculent par les règles usuelles de dérivation des fonctions à une variable.

EXEMPLE 3.2. Soit la fonction f définie par $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. On a

$$\partial_x f(x, y) = 2x \cos(x^2 + y^2), \quad \partial_y f(x, y) = 2y \cos(x^2 + y^2).$$

DÉFINITION 3.7. On dit que la fonction $v = f(x, y)$ est différentiable (ou admet une différentielle) au point (x_0, y_0) si elle admet des dérivées partielles $\partial_x f(x_0, y_0)$ et $\partial_y f(x_0, y_0)$ et vérifie

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0) + \|(x, y) - (x_0, y_0)\| R(x, y, x_0, y_0)$$

avec $R(x, y, x_0, y_0)$ tendant vers 0 lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) .

On a immédiatement le résultat important suivant.

THÉORÈME 3.4. Si f est différentiable au point (x_0, y_0) , elle est continue au point (x_0, y_0) .

DÉMONSTRATION. Immédiate car

$$(x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0) + \|(x, y) - (x_0, y_0)\| R(x, y, x_0, y_0)$$

tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) . \square

REMARQUE 3.3. Ce théorème nous montre une différence importante entre les fonctions d'une variable pour lesquelles la différentiabilité se confond avec la dérivabilité et les fonctions de deux variables ou plus qui peuvent avoir des dérivées partielles et ne pas être différentiables. Reprenons l'exemple de la fonction $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ et définissons la en $(0, 0)$ par $f(0, 0) = 0$. On a

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \quad \partial_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Cependant, elle ne peut pas être différentiable en $(0, 0)$ car on a vu plus haut qu'elle n'était pas continue en ce point.

On a cependant le résultat suivant qu'on admettra.

THÉORÈME 3.5. *Soit f une fonction de deux variables définie dans un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$. Soient (x_0, y_0) et $\rho > 0$ tels que $B_\rho(x_0, y_0) \subset D$. Si $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$ existent en tout point $(x, y) \in B_\rho(x_0, y_0)$ et sont continues au point (x_0, y_0) , f est différentiable au point (x_0, y_0) .*

Nous passons maintenant à une formule importante connue sous le nom de **règle de la chaîne** qui permet de dériver la fonction $g(t) = f(x(t), y(t))$ obtenue lorsque les deux variables d'une fonction à deux variables dépendent elles-mêmes d'une même troisième variable.

THÉORÈME 3.6. *Si $x = u(t)$ et $y = v(t)$ sont deux fonctions dérivables de la variable réelle t et si $z = f(x, y)$ est une fonction différentiable au point $(u(t_0), v(t_0))$, alors la fonction $\varphi(t) = f(u(t), v(t))$ est dérivable au point t_0 et*

$$\varphi'(t_0) = \partial_x f(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + \partial_y f(u(t_0), v(t_0))v'(t_0).$$

DÉMONSTRATION. La différentiabilité de f au point $(u(t_0), v(t_0))$ donne

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(u(t), v(t)) &= f(u(t_0), v(t_0)) + \\ &+ (u(t) - u(t_0))\partial_x f(u(t_0), v(t_0)) + (v(t) - v(t_0))\partial_y f(u(t_0), v(t_0)) + \\ &+ \|(u(t), v(t)) - (u(t_0), v(t_0))\| R(u(t), v(t), u(t_0), v(t_0)). \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow t_0} R(u(t), v(t), u(t_0), v(t_0)) = 0$$

car $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u(t_0)$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v(t_0)$. Le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$u(t) - u(t_0) = (t - t_0)u'(t_0 + \theta_1(t - t_0)), \quad v(t) - v(t_0) = (t - t_0)v'(t_0 + \theta_2(t - t_0))$$

avec $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$. En notant $t_1 := t_0 + \theta_1(t - t_0)$, $t_2 := t_0 + \theta_2(t - t_0)$ et $R_0 := R(u(t), v(t), u(t_0), v(t_0))$, la formule ci-dessus donnant $\varphi(t)$ se réécrit

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(t_0) + \\ &+ (t - t_0) (\partial_x f(u(t_0), v(t_0))u'(t_1) + \partial_y f(u(t_0), v(t_0))v'(t_2)) + |t - t_0| \|(u'(t_1), v'(t_2))\| R_0. \end{aligned}$$

Le passage à la limite $\lim_{t \rightarrow t_0} (\varphi(t) - \varphi(t_0)) / (t - t_0)$ donne alors la formule du théorème. \square

REMARQUE 3.4. *Si $z = f(x, y)$ admet des dérivées partielles continues sur tout D (on dira alors que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D et on notera ceci par $f \in \mathcal{C}^1(D)$), et si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions à valeurs dans D continument dérivables, alors la fonction $z(t) = f(x(t), y(t))$ est dérivable en chaque point t . La règle de la chaîne s'écrit alors de façon mnémotechnique en utilisant la notation classique pour les dérivées partielles*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Cette notation sera justifiée dans les chapitres suivants lorsqu'on introduira la notion de forme différentielle. La formule de la chaîne se généralise directement aux fonctions de trois variables ou plus

$$\begin{aligned} z &= f(x_1(t), \dots, x_N(t)), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \frac{dx_N}{dt}. \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.3. On cherche à quelle vitesse varie l'aire d'un triangle sachant que sa base et son hauteur varient au cours du temps t . On a

$$A(t) = f(b(t), h(t)) = \frac{1}{2}b(t)h(t).$$

D'où

$$\begin{aligned} A'(t) &= \partial_b f(b(t), h(t))b'(t) + \partial_h f(b(t), h(t))h'(t) \\ &= \frac{1}{2}h(t)b'(t) + \frac{1}{2}b(t)h'(t). \end{aligned}$$

C'est bien la formule qu'on aurait pu obtenir directement par la dérivation du produit.

1.4.2. Matrice jacobienne – Application au changement de variable.

DÉFINITION 3.8. Soit ψ une fonction définie dans U un ouvert de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^p qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_p(x_1, \dots, x_n))$. On dit que ψ est différentiable si les fonctions ψ_1, \dots, ψ_p le sont. Dans ce cas, on lui associe une matrice à p lignes et n colonnes ψ' , appelée jacobienne de ψ , définie par :

$$\psi'(x) = [\partial_{x_j} \psi_i(x)]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} \text{ pour tout } x \in U.$$

PROPOSITION 3.1. Soient f une fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $W \subset \mathbb{R}^p$ et g une fonction de $W \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^q toutes deux différentiables. Dans ce cas, la matrice jacobienne de la composée $g \circ f$ s'obtient ainsi pour tout a dans \mathbb{R}^n :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

DÉMONSTRATION. Posons $F = g \circ f$ qui est ainsi la fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^q définie par

$$\begin{aligned} F(x) &= (F_1(x), \dots, F_q(x)) \\ &= g(f(x)) = (g_1(f(x)), \dots, g_q(f(x))) \end{aligned}$$

Sachant que $x = (x_1, \dots, x_n)$ et en posant $y = f(x)$ ou encore suivant les composantes

$$\begin{aligned} y &= (y_1, \dots, y_p) \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

en utilisant la règle de la chaîne précédente :

$$\partial_{x_j} F_i(a) = \sum_{k=1}^p \partial_{y_k} g_i(f(a)) \partial_{x_j} f_k(a),$$

avec $j = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, q$, la proposition est une conséquence directe de la formule donnant le produit de la matrice $g'(f(a))$ et de la matrice $f'(a)$. \square

REMARQUE 3.5. Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 . Soient f une fonction de deux variables x et y , de D dans \mathbb{R} et ϕ une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (un changement de variable), bijective sur D telle que $\phi(x, y) = (u, v)$. Alors, on aura :

$$f(x, y) = g(\phi(x, y)) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

Si les jacobienes de f , g et ϕ sont notées respectivement f' , g' et ϕ' , nous avons

$$f'(a) = g'(\phi(a))\phi'(a).$$

La formule de la chaîne s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \partial_u g \partial_x u + \partial_v g \partial_x v \\ \partial_y f &= \partial_u g \partial_y u + \partial_v g \partial_y v. \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.4. *Appliquons cette formule au passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. La relation de changement de variables est définie de façon plus aisée en exprimant les coordonnées cartésiennes à l'aide des coordonnées polaires*

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta)\end{aligned}$$

avec $r > 0$ et (par exemple) $0 < \theta < 2\pi$. (On peut fixer d'autres déterminations pour l'argument θ comme par exemple $-\pi < \theta < \pi$.) La relation suivante permet d'exprimer la fonction f des coordonnées cartésiennes (x, y) à partir de la fonction g des coordonnées polaires (r, θ)

$$f(x, y) = g(r, \theta).$$

On veut calculer les dérivées partielles $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$ à partir des dérivées partielles $\partial_r g(r, \theta)$ et $\partial_\theta g(r, \theta)$. La règle de la chaîne donne

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \partial_r g(r, \theta) \partial_x r + \partial_\theta g(r, \theta) \partial_x \theta \\ \partial_y f(x, y) &= \partial_r g(r, \theta) \partial_y r + \partial_\theta g(r, \theta) \partial_y \theta\end{aligned}$$

Il est facile d'exprimer $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ à partir de x et y . On a alors directement

$$\partial_x r = x / \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \partial_y r = y / \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ce n'est pas le cas pour l'argument θ qui ne peut être donné par une formule à l'aide de x et y que si par exemple $0 < \theta < \pi$: $\theta = \text{Arccos}(x / \sqrt{x^2 + y^2})$. Il n'y a aucune difficulté en revanche à calculer

$$\begin{aligned}\partial_r x &= \cos \theta & \partial_r y &= \sin \theta \\ \partial_\theta x &= -r \sin \theta & \partial_\theta y &= r \cos \theta\end{aligned}$$

La formule de la chaîne donne alors

$$\begin{aligned}\partial_r g(r, \theta) &= \partial_x f(x, y) \partial_r x + \partial_y f(x, y) \partial_r y = \partial_x f(x, y) \cos \theta + \partial_y f(x, y) \sin \theta \\ \partial_\theta g(r, \theta) &= \partial_x f(x, y) \partial_\theta x + \partial_y f(x, y) \partial_\theta y = \partial_x f(x, y) (-r \sin \theta) + \partial_y f(x, y) (r \cos \theta)\end{aligned}$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \partial_r g(r, \theta) \\ \frac{1}{r} \partial_\theta g(r, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{bmatrix}$$

Comme la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

est une matrice orthogonale, on obtient alors directement

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \cos \theta \partial_r g(r, \theta) - \sin \theta \frac{1}{r} \partial_\theta g(r, \theta) \\ \partial_y f(x, y) &= \sin \theta \partial_r g(r, \theta) + \cos \theta \frac{1}{r} \partial_\theta g(r, \theta)\end{aligned}$$

1.5. Dérivées d'ordre supérieur. Si $z = f(x, y)$ admet une dérivée partielle $\partial_x f(x, y)$ en tout point $(x, y) \in D$, on obtient de cette façon une nouvelle fonction de deux variables par $w = \partial_x f(x, y)$. Si cela est possible, on peut définir une dérivée partielle d'ordre 2 en dérivant encore $\partial_x f$ par rapport à la variable x : $\partial_{xx}^2 f = \partial_x \partial_x f$, ou par rapport à la variable y : $\partial_{yx}^2 f = \partial_y \partial_x f$. De façon plus classique, ces dérivées d'ordre 2 sont notées par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

EXEMPLE 3.5. Soit $z = e^{y^2} \sin(x)$. On a $\partial_x(e^{y^2} \sin(x)) = e^{y^2} \cos(x)$, $\partial_{yx}^2(e^{y^2} \sin(x)) = \partial_y(e^{y^2} \cos(x)) = 2ye^{y^2} \cos(x)$. On aurait pu aussi calculer $\partial_y(e^{y^2} \sin(x)) = 2ye^{y^2} \sin(x)$, puis $\partial_{xy}(e^{y^2} \sin(x)) = \partial_x(2ye^{y^2} \sin(x)) = 2ye^{y^2} \cos(x)$. On remarque que **le résultat de la dérivation est indépendant de l'ordre des dérivées partielles**. Cette propriété est en fait générale. Elle est établie dans le théorème suivant dont on admettra le résultat.

THÉORÈME 3.7. Soit f une fonction de deux variables. Si $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_{xy}^2 f$ et $\partial_{yx}^2 f$ existent et sont continues, alors

$$\partial_{xy}^2 f = \partial_{yx}^2 f.$$

REMARQUE 3.6. Le théorème précédent s'étend de façon évidente aux fonctions de plus de deux variables et on a, si $z = f(x_1, \dots, x_N)$,

$$\partial_{x_i x_j}^2 f = \partial_{x_j x_i}^2 f, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Il s'étend aussi par récurrence aux dérivées d'ordre supérieur à 2, par exemple,

$$\partial_{x_i x_j x_k}^3 f = \partial_{x_j x_i x_k}^3 f = \partial_{x_k x_i x_j}^3 f.$$

1.6. Formule de Taylor. La formule de Taylor pour les fonctions à plusieurs variables se déduit de celle pour les fonctions à une variable. Ici, le cas d'une fonction f à deux variables (x, y) se traite plus facilement en le considérant comme un cas particulier d'une fonction f à N variables (x_1, \dots, x_N) en notant $x_1 := x$ et $x_2 := y$.

Soit f une fonction de N variables $x := (x_1, \dots, x_N)$ variant dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^N$. Supposons que le segment joignant x et $a := (a_1, \dots, a_N)$ reste contenu dans D , c'est-à-dire

$$\{u \in \mathbb{R}^N; u = (1-t)a + tx = a + t(x-a)\} \subset D.$$

Notons par $u(t) = a + t(x-a)$, ou encore $u_i(t) = a_i + t(x_i - a_i)$. En supposant que les dérivées partielles correspondantes de f existent et sont continues, on peut calculer les différentes dérivées de la fonction $\varphi(t) = f(u(t))$. On sait déjà que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \partial_{x_1} f(u(t))(x_1 - a_1) + \dots + \partial_{x_N} f(u(t))(x_N - a_N) \\ &= \sum_{i_1=1}^N \partial_{x_{i_1}} f(u(t))(x_{i_1} - a_{i_1}) \end{aligned}$$

Dérivons une nouvelle fois par rapport à t

$$\varphi''(t) = \sum_{i_1=1}^N \partial_{x_1} \partial_{x_{i_1}} f(u(t))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_1 - a_1) + \dots + \partial_{x_N} \partial_{x_{i_1}} f(u(t))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_N - a_N).$$

On peut écrire l'expression précédente sous forme d'une somme double

$$\varphi''(t) = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \partial_{x_{i_1} x_{i_2}}^2 f(u(t))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}).$$

On voit donc que la dérivée d'ordre m de φ est donnée par une somme multiple d'ordre m

$$\varphi^{(m)}(t) = \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_m=1}^N \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}^m f(u(t))(x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m}).$$

La formule de Taylor donnant le développement de $f(x) = \varphi(1)$ au point a s'obtient en développant $\varphi(1)$ au point 0 en utilisant le fait que $u(0) = a$.

1.6.1. *Formule de Taylor à l'ordre 1.* Développons $\varphi(1)$ en 0 à l'ordre 1

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(\theta)}{2}, \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \partial_{x_1} f(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \partial_{x_N} f(a)(x_N - a_N) + R_2 \\ R_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \partial_{x_{i_1} x_{i_2}}^2 f(u(\theta))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \end{aligned}$$

Sachant que

$$|(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2})| \leq \|x - a\|^2$$

on voit que le développement $f(a) + \partial_{x_1} f(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \partial_{x_N} f(a)(x_N - a_N)$ permet d'approcher $f(x)$ avec une erreur

$$|R_2| \leq C \|x - a\|^2$$

où C est une constante indépendante de $x - a$.

Il est souvent commode de noter le développement précédent sous forme matricielle sous la forme

$$f(x) = f(a) + \begin{bmatrix} (x_1 - a_1) & \cdots & (x_N - a_N) \end{bmatrix} \text{grad } f(a) + R_2$$

où le gradient de f au point a , $\text{grad } f(a)$, est le vecteur colonne à N composantes

$$\text{grad } f(a) := \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f(a) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(a) \end{bmatrix}.$$

En identifiant $x - a$ au vecteur colonne

$$x - a = \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_N - a_N \end{bmatrix}$$

le développement précédent se réécrit

$$f(x) = f(a) + (x - a)^\top \text{grad } f(a) + R_2.$$

Notons que $(x - a)^\top \text{grad } f(a)$ n'est rien d'autre que le produit scalaire des deux vecteurs $(x - a)$ et $\text{grad } f(a)$.

1.6.2. *Formule de Taylor à l'ordre 2.* Développons maintenant $\varphi(1)$ à l'ordre 2 au point 0

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{6}\varphi^{(3)}(\theta), \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x - a)^\top \text{grad } f(a) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i x_j}^2 f(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + R_3, \\ R_3 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \partial_{x_i x_j x_k}^3 f(u(\theta))(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k). \end{aligned}$$

En introduisant la matrice hessienne $Hf(a)$ de f au point a

$$(Hf(a))_{ij} = \partial_{x_i x_j}^2 f(a), \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

le développement précédent se réécrit sous forme matricielle

$$f(x) = f(a) + (x - a)^\top \text{grad } f(a) + \frac{1}{2}(x - a)^\top H f(a)(x - a) + R_3.$$

En observant que

$$|(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k)| \leq \|x - a\|^3$$

on voit que le développement

$$f(a) + (x - a)^\top \text{grad } f(a) + \frac{1}{2}(x - a)^\top H f(a)(x - a),$$

permet d'approcher $f(x)$ avec une erreur maintenant majorée par

$$|R_3| \leq C \|x - a\|^3.$$

1.6.3. *Développement de Taylor d'ordre m .* Si f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $m + 1$ (c'est-à-dire $f \in \mathcal{C}^{m+1}(D)$) et que le segment joignant a à x est dans D , on peut développer $\varphi(1)$ à l'ordre m au point 0

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \cdots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta), \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1.$$

On en déduit le développement de Taylor de $f(x)$ au point a

THÉORÈME 3.8. *Sous les conditions précédentes, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^N (x_i - a_i) \partial_{x_i} f(a) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_m} - a_{i_m}) \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}^m f(a) + R_{m+1} \\ R_{m+1} &= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^N (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_{m+1}} - a_{i_{m+1}}) \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_{m+1}}}^{m+1} f(u(\theta)) \end{aligned}$$

avec

$$|R_{m+1}| \leq C \|x - a\|^{m+1}.$$

2. Intégrales multiples

2.1. Définition de l'intégrale multiple. Là aussi, nous définirons l'intégrale double, c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction de deux variables et généraliserons ensuite au cas des intégrales multiples, intégrales de fonctions à plusieurs variables.

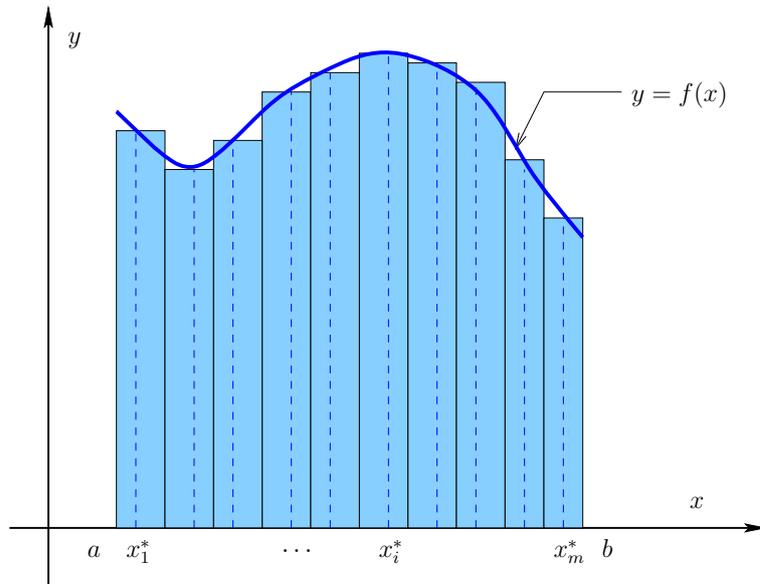
2.1.1. *Rappels sur l'intégrale simple.* Rappelons que l'intégrale simple est définie, lorsqu'elle existe, comme limite des sommes de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(x_i^*) \Delta x_i$$

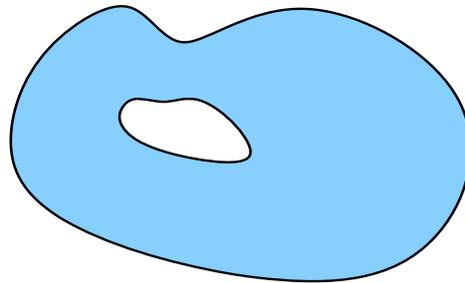
avec

$$x_0 = a < x_1 = x_0 + \Delta x_1 < \cdots < x_{i+1} = x_i + \Delta x_i < \cdots < x_m = b,$$

x_i^* un point quelconque de $[x_{i-1}, x_i]$, et $\delta := \max \Delta x_i$. Autrement dit, l'intégrale simple, qui est l'aire limitée par la courbe $\{y = f(x)\}$, l'axe des x et les deux droites $\{x = a\}$ et $\{x = b\}$, est approchée par la somme des aires des rectangles $f(x_i^*) \Delta x_i$.



2.1.2. *Définition de l'intégrale double.* Le domaine d'intégration d'une intégrale simple est un intervalle fermé borné. Une première difficulté se pose avec l'intégrale double : le domaine d'intégration peut avoir **une forme géométrique infiniment variée**. Pour définir l'intégrale simple, on est amené à supposer ainsi que le domaine d'intégration est un **domaine quarrable borné** D de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire que D est un domaine contenu **dans un rectangle** R à côtés parallèles aux axes des coordonnées et que son aire existe et est finie. Intuitivement, un domaine quarrable borné est un ensemble de points limité par une (ou plusieurs) courbe(s) simples comme l'indique la figure suivante



Domaine quarrable

Soit f une fonction définie et **bornée** sur le domaine D , c'est-à-dire, vérifiant

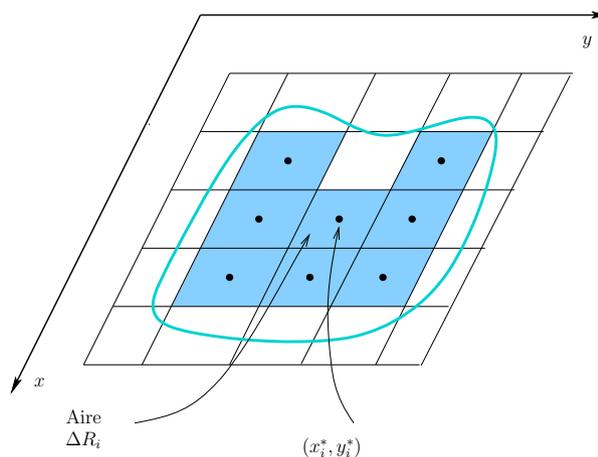
$$\exists M : |f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Pour définir l'intégrale de f sur D , on commence par construire une **somme de Riemann**. Cela est effectué dans les deux étapes suivantes

Etape 1: On subdivise le rectangle R en sous-rectangles à côtés parallèles aux axes. On écarte tous les sous-rectangles ayant au moins un point à l'extérieur de D . On note alors

$$R_1, R_2, \dots, R_n$$

les rectangles restant et ΔR_i l'aire de R_i .



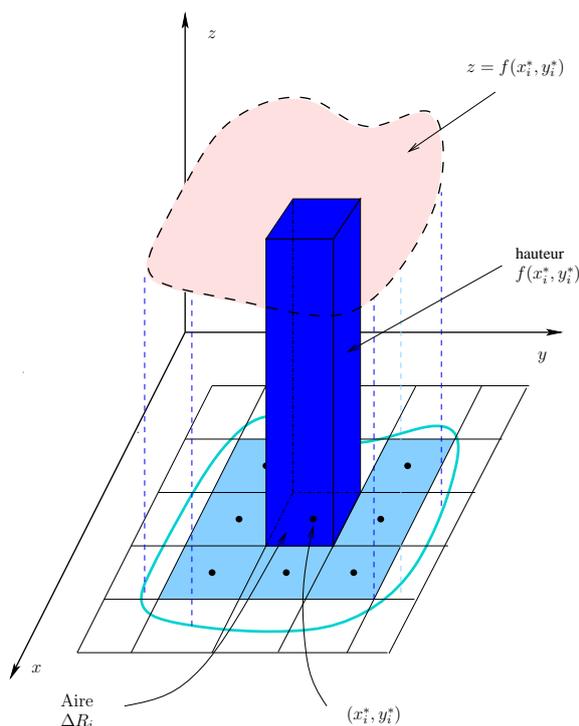
On note de même δ_i la longueur du plus grand côté de R_i et $\delta := \max \delta_i$.

Étape 2: On choisit un point dans chaque rectangle R_i qu'on note

$$(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*).$$

La somme de Riemann de la fonction f associée aux rectangles et aux points précédents est définie par

$$\sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i.$$



On peut alors définir l'intégrale de f sur D lorsqu'elle existe.

DÉFINITION 3.9. Si la limite des sommes de Riemann existe lorsque $\delta \rightarrow 0$, la fonction f est dite intégrable sur D et son intégrale est la valeur de cette limite

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i.$$

Nous admettrons le théorème suivant qui généralise le théorème correspondant pour les intégrales simples.

THÉORÈME 3.9. *Si f est continue en tout point de l'adhérence \overline{D} d'un domaine quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$, alors f est intégrable sur D .*

2.2. Propriétés de l'intégrale double.

2.2.1. *Formule d'additivité.* Elle généralise la relation de Chasles pour les intégrales simples

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \text{pour } a < c < b.$$

THÉORÈME 3.10. *Soient D un domaine quarrable borné de \mathbb{R}^2 et A et B deux domaines quarrables vérifiant*

$$D = A \cup B \text{ et aire de } A \cap B = 0.$$

Alors, f est intégrable sur D si et seulement si f est intégrable sur A et sur B et

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dx dy + \int_B f(x, y) dx dy$$

DÉMONSTRATION. On écrit sous forme de trois termes la somme de Riemann précédente en distinguant parmi les indices les trois ensembles

- $I_A := \{i = 1, \dots, m; R_i \subset A\}$,
- $I_B := \{i = 1, \dots, m; R_i \subset B\}$,
- $I_0 := \{i = 1, \dots, m; i \notin I_A \cup I_B\}$,

$$\sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i = \sum_{i \in I_A} f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i + \sum_{i \in I_B} f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i + \sum_{i \in I_0} f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i$$

Le troisième terme est majoré comme suit

$$\left| \sum_{i \in I_0} f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i \right| \leq \sum_{i \in I_0} |f(x_i^*, y_i^*)| \Delta R_i \leq M \sum_{i \in I_0} \Delta R_i.$$

Il résulte du fait que aire de $A \cap B = 0$ que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i \in I_0} \Delta R_i = 0.$$

Si f est intégrable sur A et intégrable sur B , les deux premiers termes ont pour limite respective

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i \in I_A} f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i = \int_A f(x, y) dx dy, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i \in I_B} f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i = \int_B f(x, y) dx dy.$$

Ceci démontre la condition suffisante. La condition nécessaire demande un approfondissement de la construction de l'intégrale double. Elle sera admise ici. \square

REMARQUE 3.7. *Le théorème a plusieurs conséquences importantes en pratique.*

- (1) *Il montre que les valeurs d'une fonction f sur une courbe n'a pas d'influence sur l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale. Ceci est à comparer avec les valeurs en un point d'une fonction pour l'intégrale simple.*
- (2) *On peut simplifier le domaine d'intégration en le subdivisant en sous-domaines, ayant au plus une courbe en commun, et de forme plus simple.*

2.2.2. *Autres propriétés.* Les propriétés suivantes sont analogues à celles des intégrales simples et se déduisent directement des propriétés de l'addition de nombres réels. Pour les énoncer, on supposera que f et g sont deux fonctions données intégrables sur D .

PROPOSITION 3.2 (Linéarité de l'intégrale). *Pour λ et μ réels, on a*

$$\int_D (\lambda f + \mu g)(x, y) \, dx dy = \lambda \int_D f(x, y) \, dx dy + \mu \int_D g(x, y) \, dx dy.$$

DÉMONSTRATION. On écrit la somme de Riemann pour la fonction $\lambda f + \mu g$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^m (\lambda f + \mu g)(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i = \lambda \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i + \mu \sum_{i=1}^m g(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i$$

et on passe à la limite lorsque $\delta \rightarrow 0$. □

PROPOSITION 3.3 (Positivité de l'intégrale). *Si $f \geq 0$, alors*

$$\int_D f(x, y) \, dx dy \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. On a ainsi

$$\sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i \geq 0;$$

d'où la proposition par passage à la limite lorsque $\delta \rightarrow 0$. □

COROLLAIRE 3.1 (Comparaison des intégrales). *Si $f \geq g$, alors*

$$\int_D f(x, y) \, dx dy \geq \int_D g(x, y) \, dx dy.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que $f - g \geq 0$ et d'écrire

$$\int_D (f - g)(x, y) \, dx dy = \int_D f(x, y) \, dx dy - \int_D g(x, y) \, dx dy \geq 0.$$

□

COROLLAIRE 3.2 (Inégalité triangulaire). *On a si les intégrales sont définies*

$$\left| \int_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \int_D |f(x, y)| \, dx dy.$$

2.3. Théorème de la moyenne. Ce théorème sert à évaluer rapidement la valeur d'une intégrale sans avoir à la calculer exactement. On devine aisément son utilité pour les dimensionnements dans les pré-études techniques.

THÉORÈME 3.11. *Notons par Δ l'aire de D . La moyenne de f sur D vérifie*

$$\inf_{(x,y) \in D} f(x, y) \leq \frac{1}{\Delta} \int_D f(x, y) \, dx dy \leq \sup_{(x,y) \in D} f(x, y).$$

DÉMONSTRATION. La fonction f étant bornée sur D , elle y admet une borne supérieure et une borne inférieure. Sachant que

$$\int_D c \, dx dy = c\Delta$$

le résultat suit à partir du théorème de comparaison des intégrales. □

COROLLAIRE 3.3. *Si D est fermé et connexe et f continue sur D , alors il existe $(x_0, y_0) \in D$ tel que*

$$\frac{1}{\Delta} \int_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0).$$

DÉMONSTRATION. L'ensemble D étant borné et fermé, il est ainsi compact. Comme f est continue sur D , elle y atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure

$$\inf_{(x,y) \in D} f(x, y) = \min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(x_m, y_m), \quad \sup_{(x,y) \in D} f(x, y) = \max_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(x_M, y_M).$$

Le théorème de la moyenne assure alors que

$$f(x_m, y_m) \leq \frac{1}{\Delta} \int_D f(x, y) dx dy \leq f(x_M, y_M).$$

L'ensemble D étant connexe et f est continue sur D , le résultat suit par le théorème des valeurs intermédiaires. \square

2.4. Calcul des intégrales doubles.

2.4.1. *Calcul des intégrales doubles sur un rectangle à côtés parallèles aux axes.* Le théorème suivant ramène le calcul d'une intégrale double sur le rectangle $R := [a, b] \times [c, d]$ à un calcul itéré de deux intégrales simples.

THÉORÈME 3.12. *Soit f intégrable sur R vérifiant*

(1) *pour tout $x \in [a, b]$, $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[c, d]$,*

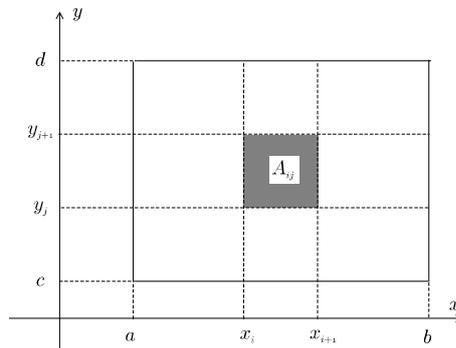
(2) *$x \mapsto \psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ est intégrable sur $[a, b]$,*

alors,

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

DÉMONSTRATION. Nous ferons la démonstration dans le cas où f est continue sur R . La dépendance d'une intégrale simple par rapport à un paramètre montre que toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées.

On considère la subdivision du rectangle R donnée de la façon suivante



- $a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{m+1} = b$
- $c = y_1 < y_2 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_{n+1} = d$
- $A_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$; $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

On forme alors la somme de Riemann

$$\varphi_f(p) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

où, grâce au théorème de la moyenne pour les intégrales simples, $y_j^* \in [y_j, y_{j+1}]$ peut être choisi tel que

$$f(x_i, y_j^*) = \frac{1}{(y_{j+1} - y_j)} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y) dy.$$

Comme $\Delta A_{ij} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$, on peut en fait effectuer la sommation comme suit

$$\varphi_f(p) = \sum_{i=1}^m (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=1}^n (y_{j+1} - y_j) f(x_i, y_j^*).$$

La somme de Riemann $\varphi_f(p)$ est donc

$$\varphi_f(p) = \sum_{i=1}^m (x_{i+1} - x_i) \psi(x_i)$$

soit, ainsi, une somme de Riemann pour la fonction ψ sur $[a, b]$. En faisant tendre

$$\delta = \max \left(\max_{1 \leq i \leq m} (x_{i+1} - x_i), \max_{1 \leq j \leq n} (y_{j+1} - y_j) \right)$$

vers 0, on obtient le théorème. □

2.4.2. Calcul des intégrales doubles sur un quarrable simple.

THÉORÈME 3.13. Soient $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues tel que

$$g(x) < h(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

L'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b]\}$$

est domaine quarrable. Il est appelé un **quarrable simple**. Si f est intégrable sur D et vérifie

(1) pour tout $x \in [a, b]$, $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[g(x), h(x)]$,

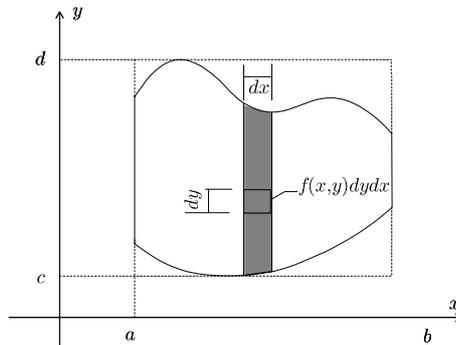
(2) $x \mapsto \psi(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$ est intégrable sur $[a, b]$,

alors,

$$\boxed{\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right\} dx.}$$

DÉMONSTRATION. Posons $c = \min_{a \leq x \leq b} g(x)$ et $d = \max_{a \leq x \leq b} h(x)$. Considérons alors la fonction \tilde{f} obtenue en prolongeant f par 0 à $[a, b] \times [c, d]$. Le théorème s'obtient en appliquant tout simplement le théorème précédent à l'intégrale de \tilde{f} sur $[a, b] \times [c, d]$. □

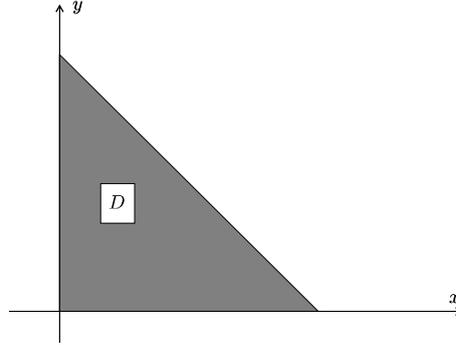
2.4.3. Interprétation géométrique.



Intégrale sur un domaine quarrable simple

EXEMPLE 3.6. Si f , g et h sont continues, les hypothèses du théorème sont vérifiées. Soient

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$$



Domaine triangulaire

Considérons alors la fonction f définie par $f(x, y) = x$;

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} x \, dy \right\} dx = \int_0^1 x(1-x) \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} x \, dx \right\} dy = \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} \, dy = \left[\frac{(y-1)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2.5. Changement de variables dans les intégrales doubles.

2.5.1. *Changement de variable.* Soient D et H deux domaines de \mathbb{R}^2 . Une application $\Psi : D \rightarrow H \subset \mathbb{R}^2$ est caractérisée à l'aide de ses fonctions coordonnées

$$\Psi(x, y) = (u = \Psi_1(x, y), v = \Psi_2(x, y))$$

et que sa jacobienne $\Psi'(x, y)$ est donnée par la matrice

$$\Psi'(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x u = \partial_x \Psi_1(x, y) & \partial_y u = \partial_y \Psi_1(x, y) \\ \partial_x v = \partial_x \Psi_2(x, y) & \partial_y v = \partial_y \Psi_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

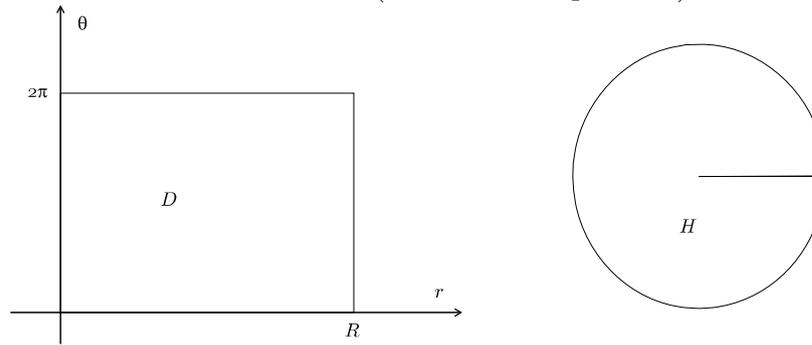
Dans tout le cours, nous noterons les dérivées partielles de la façon suivante

$$\partial_x \Psi_1(x, y) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}(x, y), \quad \partial_y \Psi_1(x, y) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}(x, y), \quad \text{etc.}$$

On dit que $\Psi : D \rightarrow H$ définit un **changement de variable** de D sur H si les conditions suivantes sont vérifiées

- (1) Ψ est une bijection différentiable de D sur H ,
- (2) $\lim \Psi(x_n, y_n) = \Psi(x, y) \Leftrightarrow \lim(x_n, y_n) = (x, y)$, (Ψ est bicontinue),
- (3) $\det \Psi'(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in D$.

EXEMPLE 3.7 (Coordonnées polaires).



Cercle de rayon R privé du segment $\{(x, 0), 0 \leq x \leq R\}$.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ; \quad \text{Jacobienne} = \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{bmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r > 0.$$

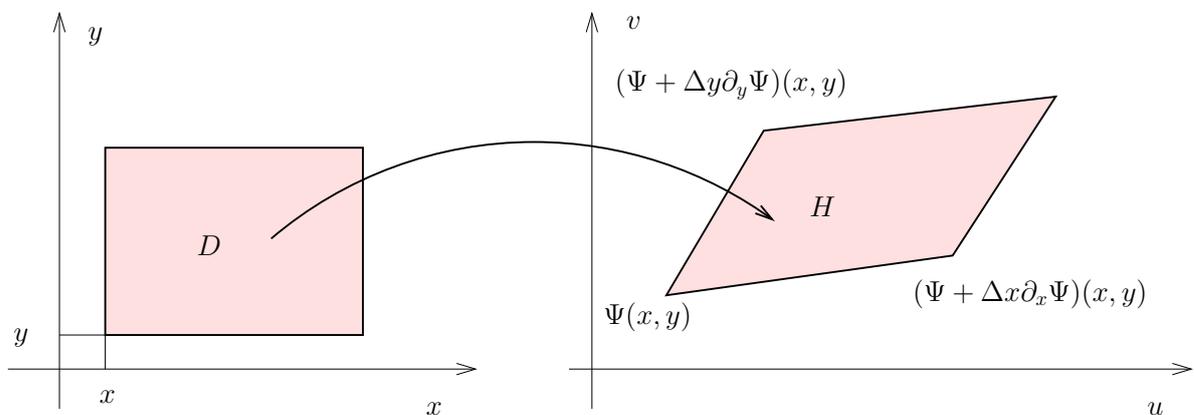
2.5.2. *Changement de variable dans une intégrale double.* La formule permettant d'effectuer un changement de variable dans une intégrale double, qui se généralise d'ailleurs directement à une intégrale multiple à plusieurs variables, est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 3.14. Soient f , une fonction intégrable sur H , et $\Psi : D \rightarrow H$ un changement de variable ; alors, $v \mapsto f(\Psi(v)) |\det \Psi'(v)|$ est intégrable sur D et l'on a

$$\int_H f(w) dw = \int_D f(\Psi(v)) |\det \Psi'(v)| dv.$$

DÉMONSTRATION. Nous nous limitons simplement ici à une indication sur le point fondamental de la démonstration.

On peut voir, en utilisant un développement limité aux éléments du second ordre près en Δx et Δy , que l'image du carré $]x, x + \Delta x[\times]y, y + \Delta y[$ est le parallélogramme de sommets $\Psi(x, y)$, $(\Psi + \Delta x \partial_x \Psi)(x, y)$, $(\Psi + \Delta y \partial_y \Psi)(x, y)$, $(\Psi + \Delta x \partial_x \Psi + \Delta y \partial_y \Psi)(x, y)$.



Transformation d'un rectangle

Remarquons maintenant que si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont deux vecteurs non colinéaires du plan de composantes¹ respectives

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

l'aire du parallélogramme défini par \mathbf{u} et \mathbf{v} est donnée par

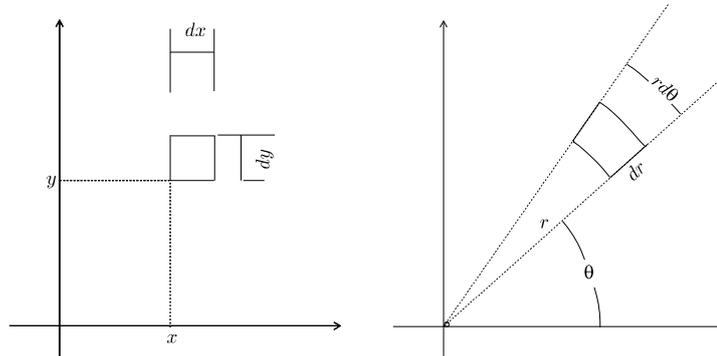
$$\left| \det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \right|.$$

Ceci montre que la formule de changement de variable est vraie aux éléments du second ordre près en Δx et en Δy pour $D =]x, x + \Delta x[\times]y, y + \Delta y[$ et $H = \Psi(]x, x + \Delta x[\times]y, y + \Delta y[)$. Le reste de la démonstration s'obtient à partir de ce cas particulier en utilisant les sommes de Riemann. \square

EXEMPLE 3.8. *Supposons que f soit intégrable sur le cercle \tilde{D} de centre 0 et de rayon R ; f est donc intégrable aussi sur le cercle D de centre 0 et de rayon R privé du segment $\{(x, 0); 0 \leq x \leq R\}$. Le théorème précédent donne alors*

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Pratiquement, on peut plus aisément exprimer la formule de changement de variable en travaillant avec l'élément d'aire



Éléments d'aire

- **Élément d'aire en coordonnées cartésiennes** : $dx dy$
- **Élément d'aire en coordonnées polaires** : $r dr d\theta$

2.6. Intégrales triples et multiples. Les intégrales triples et multiples se définissent et se calculent de manière analogue aux intégrales doubles. Nous donnerons quelques indications sur les intégrales triples en laissant le soin au lecteur d'effectuer les adaptations requises pour les intégrales de fonctions de plus de trois variables.

2.6.1. *Calcul d'intégrales triples.* Le calcul d'une intégrale triple sur le domaine d'intégration

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y) \leq z \leq h(x, y), (x, y) \in A\}$$

¹Nous distinguons ici entre les points de \mathbb{R}^2 notés à l'aide de deux coordonnées (x, y) et les vecteurs identifiés à des vecteurs colonne. Noter que le vecteur \mathbf{u} d'origine (x_A, y_A) et d'extrémité (x_B, y_B) est le vecteur de composantes $\begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix}$. Cette distinction, qui peut sembler artificielle à ce niveau, est très utile pour écrire les formules de calcul différentiel des fonctions à plusieurs variables.

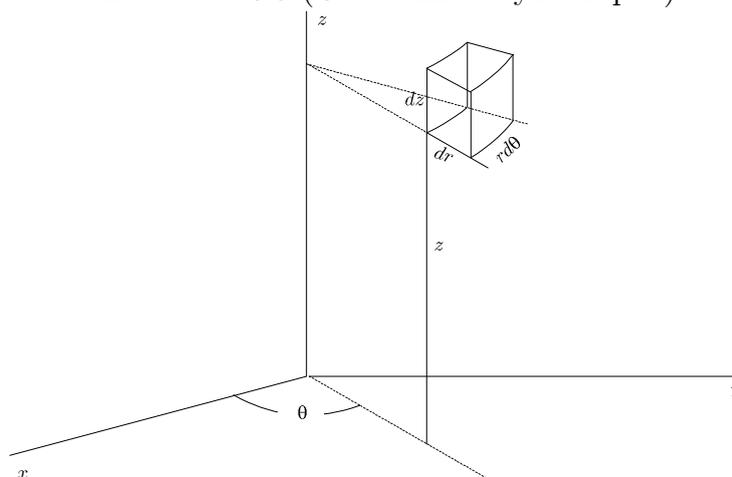
se ramène par une intégrale simple au calcul d'une intégrale double

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_A \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

2.6.2. *Changement de variable dans une intégrale triple.* On a la même formule de changement de variable que pour les intégrales doubles où maintenant $\Psi : D \rightarrow H$ est un changement de variable entre deux domaines de \mathbb{R}^3

$$\int_H f(w) dw = \int_D f(\Psi(v)) |\det \Psi'(v)| dv.$$

EXEMPLE 3.9 (Coordonnées cylindriques).



Coordonnées cylindriques

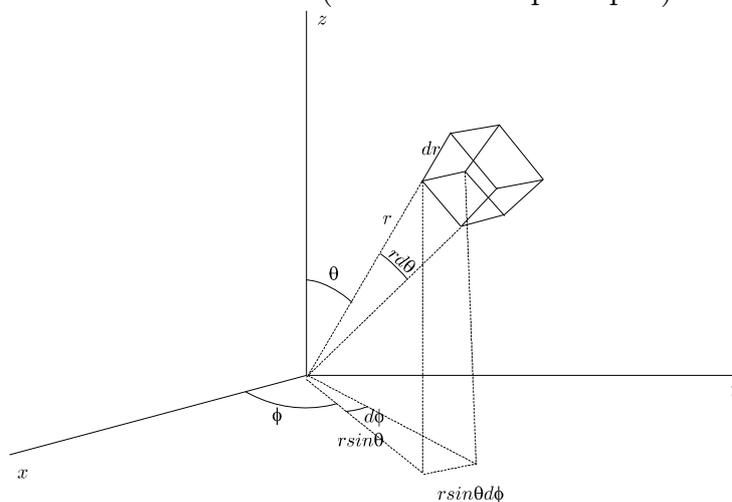
Expression des coordonnées cartésiennes

$$\begin{bmatrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{bmatrix}$$

Élément de volume

$$\begin{cases} \text{Coordonnées cartésiennes } dx dy dz \\ \text{Coordonnées cylindriques } r dr d\theta dz \end{cases}$$

EXEMPLE 3.10 (Coordonnées sphériques).



Expression des coordonnées cartésiennes

$$\begin{bmatrix} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{bmatrix}$$

Élément de volume

$$\begin{cases} \text{Coordonnées cartésiennes } dx dy dz \\ \text{Coordonnées sphériques } r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{cases}$$

Application. Calcul du volume de la sphère de rayon R

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

$$\begin{aligned} \int_D dx dy dz &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

Courbes et surfaces

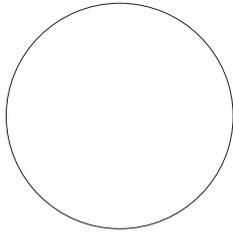
1. Courbes

Pour fixer les idées, nous considérons dans ce cours les courbes du plan. Toutes les notions introduites se transposent directement aux courbes de l'espace. Nous indiquerons à la fin de cette section les éléments qui permettent d'effectuer cette transposition ainsi que les notions spécifiques à ce cas.

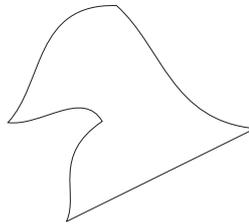
1.1. Notion de courbe.

1.1.1. *Le type de courbe considéré.* La définition rigoureuse d'une classe de courbes est assez complexe. Elle sort du cadre d'un cours d'introduction à *l'intention des ingénieurs*. Le type de courbe, introduit dans ce cours, aura un sens intuitif clair à travers la description de quelques unes de leurs caractéristiques et des exemples qui seront donnés.

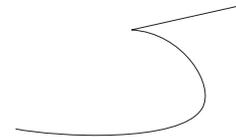
Les courbes que nous considérons sont donc des courbes simples fermées, dont un prototype est le cercle, ou ouvertes, comme par exemple le graphe d'une fonction indéfiniment dérivable. Ces courbes peuvent avoir des points anguleux, mais seulement en nombre fini. Dans ce cas, elles peuvent être considérées comme un *chainage* d'arcs de courbe simples sans point anguleux. La figure ci-dessous donne une idée des différentes situations.



Cercle



Courbe formée
par le chaînage
de 5 arcs simples



Courbe ouverte

1.1.2. Paramétrage.

DÉFINITION 4.1. *Un paramétrage d'une courbe simple C (ou d'un arc de courbe simple) du plan est la donnée d'une application*

$$\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vérifiant

- (1) \mathbf{r} est indéfiniment dérivable de I dans \mathbb{R}^2 ,
- (2) l'image de cette application est $\mathbf{r}(I) = C$,
- (3) $\mathbf{r}'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

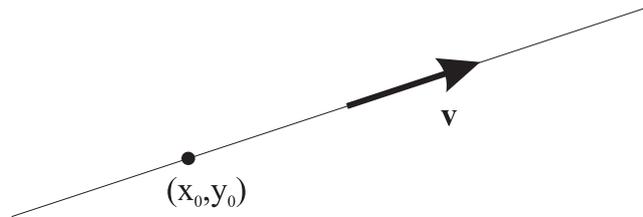
Rappelons que $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{r}'(t)$ sont données à l'aide de leurs composantes notées

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

REMARQUE 4.1. Pour que la définition soit rigoureuse, il faudrait ajouter une propriété algébrique (\mathbf{r} est une bijection entre I et C) et une propriété topologique (\mathbf{r} est bicontinue entre I et C). Ces considérations sortent du cadre de ce cours.

EXEMPLE 4.1 (Droite). La droite D passant par le point (x_0, y_0) et colinéaire au vecteur $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ (figure ci-dessous) est donnée par le paramétrage¹

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



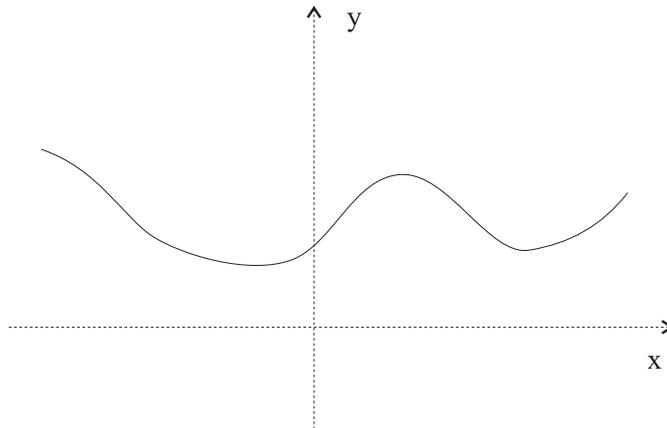
La représentation précédente est appelée **représentation paramétrique** de la droite. Si $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ est la norme du vecteur \mathbf{v} , les composantes du vecteur unitaire $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ sont appelées les cosinus directeurs de la droite D .

EXEMPLE 4.2 (Cercle). Le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R est paramétré par l'angle θ que fait son rayon avec l'axe des x de la façon suivante

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

EXEMPLE 4.3 (Graphe fonctionnel). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Le graphe G (figure ci-dessous) de la fonction f est une courbe ouverte donnée par le paramétrage

$$\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}, \quad x \in I.$$

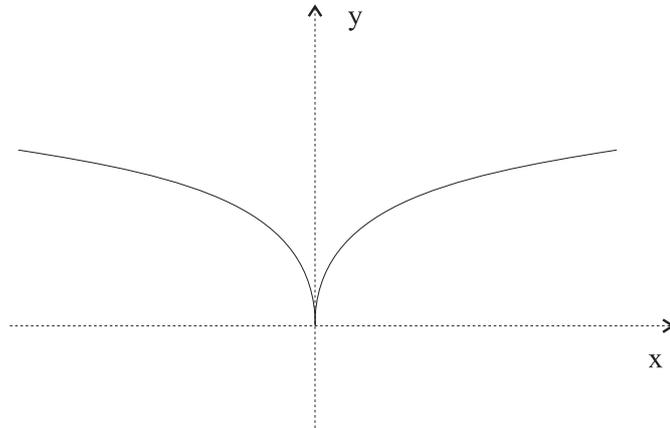


REMARQUE 4.2. La condition $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ est essentielle. L'application définie par

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

¹Nous distinguons dans la notation entre les points de \mathbb{R}^2 et les vecteurs à deux composantes réelles. Par exemple, (x_0, y_0) est le point de \mathbb{R}^2 de coordonnées x_0 et y_0 et $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ est le vecteur d'origine 0 et d'extrémité (x_0, y_0) . Il est souvent appelé rayon vecteur du point (x_0, y_0) . Ceci revient au niveau de la notation à refaire la distinction entre l'espace affine à deux dimensions et l'espace \mathbb{R}^2 .

a pour image le graphe (figure ci-dessous) de la fonction $y = \sqrt[3]{x^2}$ et ne définit pas un arc de courbe simple (point singulier en 0).



DÉFINITION 4.2. Un **arc de courbe simple fermé** est obtenu par un paramétrage (I, \mathbf{r}) avec $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} .

1.1.3. *Changement de paramétrage - Orientation.* Soit (J, \mathbf{m}) un paramétrage d'une courbe C et

$$\alpha : I \longrightarrow J$$

un changement de variable $\tau = \alpha(t)$ (c'est-à-dire α est une bijection indéfiniment dérivable entre I et J vérifiant donc $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$). Posons $\mathbf{r}(t) = \mathbf{m}(\alpha(t))$. la formule de dérivation des fonctions composées

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{m}'(\alpha(t))\alpha'(t)$$

permet de vérifier que (I, \mathbf{r}) est un autre paramétrage de la courbe C . On dit que les deux paramétrages (I, \mathbf{r}) et (J, \mathbf{m}) sont **équivalents**.

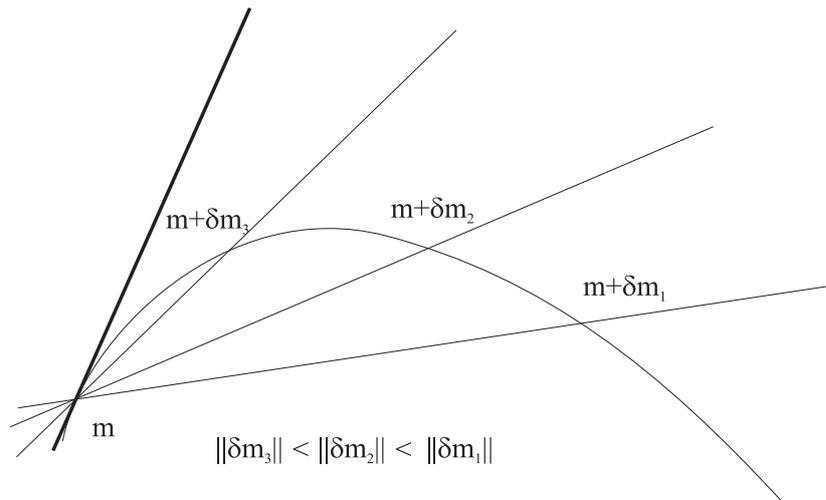
La définition *rigoureuse* du paramétrage d'une courbe permettrait de montrer que deux paramétrages quelconques d'une même courbe sont nécessairement équivalents. Nous admettrons dans ce cours cette propriété.

Nous définissons l'**orientation** d'une courbe de façon intuitive comme le choix d'un sens de parcours pour cette courbe. Un paramétrage (I, \mathbf{r}) de la courbe est **dans le sens de (ou compatible avec) l'orientation** lorsque $\mathbf{r}(t)$ parcourt la courbe **dans le sens de l'orientation** lorsque t croît. Il est dans le **sens contraire** de l'orientation **sinon**. Les deux paramétrages (I, \mathbf{r}) et (J, \mathbf{m}) ont la même orientation si la fonction α' est positive (comme α' garde un signe constant, il suffit que $\alpha'(t_0) > 0$ pour un t_0 particulier de I).

1.1.4. *Vecteur tangent.*

DÉFINITION 4.3. Soient une courbe C et un point non anguleux $m = (x, y)$ de C . Soit $m + \delta m = (x + \delta x, y + \delta y)$ un autre point de la courbe C . La droite passant par les points m et $m + \delta m$ tend vers la tangente D à C au point m lorsque δm tend vers 0 (figure ci-dessous). Tout vecteur \mathbf{v} non nul colinéaire à la droite D est un vecteur tangent à C

au point m .



Soit (I, \mathbf{r}) un paramétrage de C . Pour $t \in I$, on prend $m = \mathbf{r}(t)$ et $m + \delta m = \mathbf{r}(t + h)$. Le vecteur

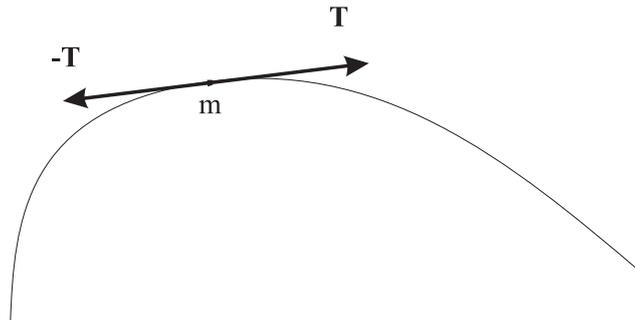
$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$$

est donc tangent à C . On lui associe le **vecteur unitaire tangent**

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) / \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Le vecteur $\mathbf{T}(t)$ est dirigé dans le sens de l'orientation induite par le paramétrage (I, \mathbf{r}) .

REMARQUE 4.3. La courbe C admet au point $\mathbf{r}(t)$ deux vecteurs unitaires tangents : $\mathbf{T}(t)$ dans le sens de l'orientation induite par le paramétrage et $-\mathbf{T}(t)$ dans le sens contraire (figure ci-dessous).



EXEMPLE 4.4 (Droite). $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} : \mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}$, $\mathbf{T}(t) = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$ est constant. Ses composantes sont les cosinus directeurs de la droite.

EXEMPLE 4.5 (Cercle). $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{r}_0 + R \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} : \mathbf{r}'(\theta) = R \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$.

EXEMPLE 4.6 (Graphe). $\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} : \mathbf{r}'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}$.

1.1.5. *Vecteur normal principal.* On part de la propriété suivante.

PROPOSITION 4.1. *Soit $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 dérivable. Si $\|\mathbf{w}(t)\|$ est constant, alors $\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{w}'(t) = 0, \forall t \in I$.*

DÉMONSTRATION. On écrit simplement $\frac{1}{2} (\|\mathbf{w}(t)\|^2)' = \frac{1}{2} (x^2(t) + y^2(t))' = 0$. Or $\frac{1}{2} (x^2(t) + y^2(t))' = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = \mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{w}'(t)$. \square

DÉFINITION 4.4. *Soit (I, \mathbf{r}) un paramétrage d'une courbe C . Il résulte de la proposition précédente que si $\mathbf{T}'(t) \neq 0$, le vecteur*

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t) / \|\mathbf{T}'(t)\|}$$

*est un vecteur unitaire normal à la courbe C au point $\mathbf{r}(t)$. On l'appelle le **vecteur normal principal** à la courbe C au point $\mathbf{r}(t)$.*

Cette définition est justifiée par la proposition suivante.

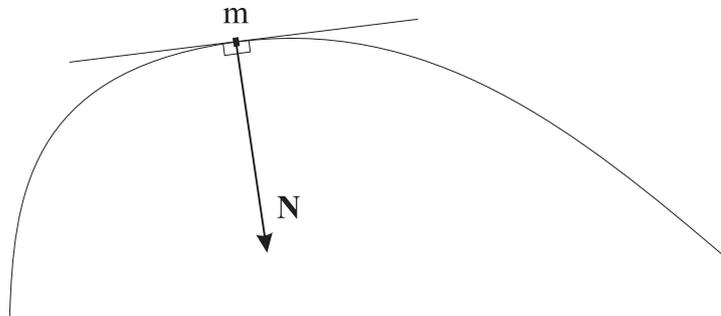
PROPOSITION 4.2. *Lorsqu'il existe, le vecteur normal principal $\mathbf{N}(t)$ ne dépend pas du paramétrage.*

DÉMONSTRATION. Soit un autre paramétrage donné par $\tau = \alpha(t)$. On a $\mathbf{T}(t) = \varepsilon \mathbf{T}(\tau)$ avec $\varepsilon = \alpha'(t) / |\alpha'(t)| = \pm 1$. On a $\partial_t \mathbf{T}(t) = \varepsilon \partial_\tau \mathbf{T}(\tau) \alpha'(t)$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \partial_t \mathbf{T}(t) / \|\partial_t \mathbf{T}(t)\| = \varepsilon \partial_\tau \mathbf{T}(\tau) \alpha'(t) / \|\varepsilon \partial_\tau \mathbf{T}(\tau) \alpha'(t)\| \\ &= \varepsilon (\alpha'(t) / |\alpha'(t)|) \partial_\tau \mathbf{T}(\tau) / \|\partial_\tau \mathbf{T}(\tau)\| = \mathbf{N}(\tau). \end{aligned}$$

\square

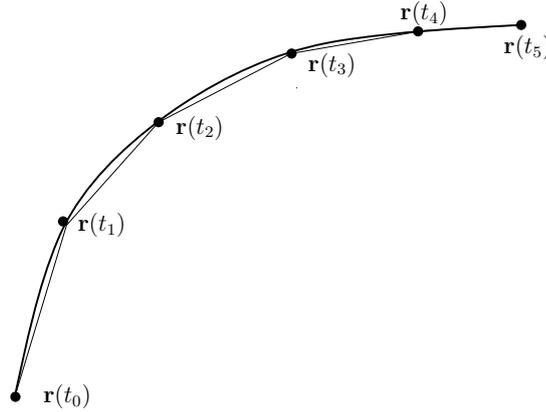
REMARQUE 4.4. *On peut démontrer que le vecteur $\mathbf{N}(t)$ est dirigé vers la concavité (c'est-à-dire vers le demi-plan limité par la tangente où se trouve la courbe, voir figure ci-dessous).*



1.2. Notion de longueur d'une courbe.

1.2.1. *Définition.* Soit un arc de courbe simple fermé C paramétré par $([a, b], \mathbf{r})$. De façon intuitive, si on considère une ligne polygonale formée de cordes de C comme l'indique

la figure suivante



avec donc : $t_0 := a$, $t_m := b$,

$$(x_0, y_0) = \mathbf{r}(t_0), (x_1, y_1) = \mathbf{r}(t_1), \dots, (x_i, y_i) = \mathbf{r}(t_i), \dots, (x_m, y_m) = \mathbf{r}(t_m),$$

la longueur ℓ de l'arc de courbe C sera approchée par la longueur de la ligne polygonale

$$\ell \approx \sum_{i=0}^{m-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\|$$

si $\max_{i=0, \dots, m-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\|$ est suffisamment petit. Notons $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$, la bicontinuité de la fonction \mathbf{r} montre que $\max_{i=0, \dots, m-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| \rightarrow 0$ si et seulement si $\Delta := \max_{i=0, \dots, m-1} \Delta t_i \rightarrow 0$. La proposition suivante permet alors de définir de façon rigoureuse la longueur de l'arc de courbe C .

PROPOSITION 4.3. *On a*

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

DÉMONSTRATION. On applique la formule de Taylor aux deux composantes de $\mathbf{r}(t)$

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= x(t_i) + \Delta t_i x'(t_i) + \frac{\Delta t_i^2}{2} x''(t_i + \theta_i \Delta t_i), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \\ y(t_{i+1}) &= y(t_i) + \Delta t_i y'(t_i) + \frac{\Delta t_i^2}{2} y''(t_i + \eta_i \Delta t_i), \quad 0 \leq \eta_i \leq 1. \end{aligned}$$

En notant par

$$\mathbf{g}_i := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x''(t_i + \theta_i \Delta t_i) \\ y''(t_i + \eta_i \Delta t_i) \end{bmatrix}$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue et sur la norme euclidienne, on peut écrire

$$\left| \sum_{i=0}^{m-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| - \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t_i \|\mathbf{r}'(t_i)\| \right| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i) - \Delta t_i \mathbf{r}'(t_i)\| = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t_i^2 \|\mathbf{g}_i\|$$

Notons $M_1 := \max_{a \leq t \leq b} |x''(t)|$, $M_2 := \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$. On a $\|\mathbf{g}_i\| \leq \left(\sqrt{M_1^2 + M_2^2} \right) / 2$ et donc

$$\sum_{i=0}^{m-1} \Delta t_i^2 \|\mathbf{g}_i\| \leq \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{2} \Delta \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t_i = \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{2} (b - a) \Delta.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left| \sum_{i=0}^{m-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| - \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t_i \|\mathbf{r}'(t_i)\| \right| = 0.$$

On obtient la proposition en remarquant que $\sum_{i=0}^{m-1} \Delta t_i \|\mathbf{r}'(t_i)\|$ est une somme de Riemann pour l'intégrale $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ et que donc

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t_i \|\mathbf{r}'(t_i)\| = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

□

DÉFINITION 4.5. La longueur d'un arc de courbe simple fermé $([a, b], \mathbf{r})$ est donnée par

$$\ell = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Souvent en physique, on exprime la définition précédente à l'aide de l'élément de longueur de la courbe

$$d\ell = \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

EXEMPLE 4.7 (Segment de droite). On a en utilisant la formule

$$\ell = (b - a) \|\mathbf{v}\|.$$

C'est bien sûr la valeur que l'on trouve directement par

$$\|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)\| = (b - a) \|\mathbf{v}\|.$$

EXEMPLE 4.8 (Cercle). Comme $\|\mathbf{r}'(\theta)\| = R\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = R$, on retrouve la longueur du cercle par

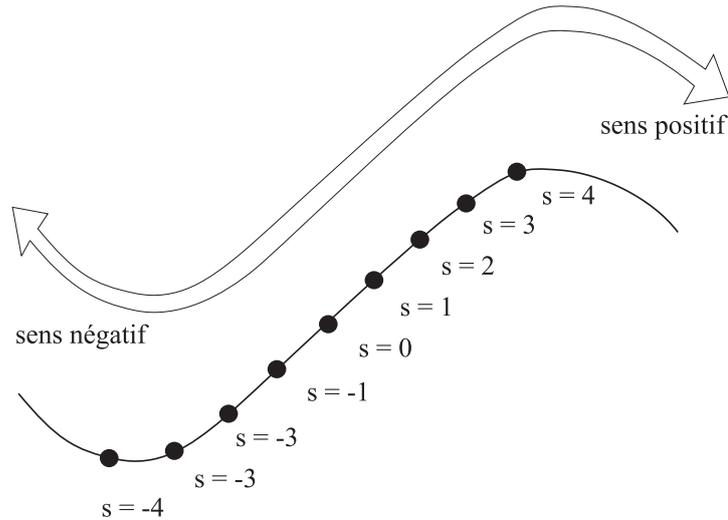
$$\ell = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R.$$

EXEMPLE 4.9 (Graphe). Si f est définie sur le segment $[a, b]$, on a

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

1.3. Abscisse curviligne. C'est souvent le meilleur paramètre pour décrire une courbe et ses propriétés. Pour fixer une abscisse curviligne, on procède comme suit.

- (1) On choisit un point arbitraire sur la courbe m_0 qui sera l'origine des abscisses.
- (2) A partir de l'origine des abscisses, on choisit une direction le long de la courbe qui sera la direction positive pour les abscisses, l'autre direction étant la direction négative.
- (3) Si m est un point de la courbe, la valeur absolue $|s|$ de son abscisse curviligne s , sera la longueur de l'arc de courbe d'extrémités m_0 et m . Le signe de s sera positif si le sens $m_0 m$ est dans la direction positive et négatif sinon (figure ci-dessous).



Soit (I, \mathbf{r}) un paramétrage de C dans le sens de l'orientation choisie pour compter positivement les abscisses curvilignes. On note $m_0 = \mathbf{r}(t_0)$ et $m = \mathbf{r}(t)$. Par définition même, on a

$$s = \alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{r}'(\sigma)\| d\sigma.$$

Comme $\alpha'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0$, α réalise un changement de variable $\alpha : I \rightarrow J$. Le paramétrage (J, \mathbf{m}) avec $\mathbf{m} = \mathbf{r} \circ \alpha^{-1}$ est un paramétrage par l'abscisse curviligne s . Pour ce paramétrage, on exprime directement le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}(s)$ à la courbe C orienté vers les abscisses curvilignes croissantes.

PROPOSITION 4.4. *Soit (J, \mathbf{m}) un paramétrage de la courbe C par une abscisse curviligne s . Alors,*

$$\mathbf{m}'(s) = \mathbf{T}(s).$$

DÉMONSTRATION. On a en appliquant la règle de la chaîne

$$\mathbf{r}'(t) = \alpha'(t)\mathbf{m}'(s) = \|\mathbf{r}'(t)\| \mathbf{m}'(s)$$

d'où la formule en simplifiant par $\|\mathbf{r}'(t)\|$. □

1.4. Notion de courbure.

DÉFINITION 4.6. *La courbure d'une courbe C au point m est définie à l'aide d'une abscisse curviligne s par*

$$\kappa(m) = \|\mathbf{T}'(s)\|, \quad m = \mathbf{m}(s).$$

Comme $\partial_s \mathbf{T}(s) = \varepsilon \partial_\sigma \mathbf{T}(\sigma)$, avec $\varepsilon = \pm 1$, pour toute autre abscisse curviligne σ , la courbure ne dépend pas de l'abscisse curviligne particulière qui sert à la définir. On peut noter aussi plus en relation avec le paramétrage $\kappa(s)$, $\kappa(t)$, etc...

Il résulte de la proposition 4.2 que si $\kappa(s) \neq 0$, le vecteur normal principal est défini et est donné par la relation

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s).$$

La formule précédente n'est pas commode en pratique pour le calcul de la courbure car elle nécessite de recourir à une abscisse curviligne. La proposition suivante fournit un moyen d'exprimer la courbure à l'aide d'un paramétrage quelconque.

PROPOSITION 4.5. Soit (I, \mathbf{r}) un paramétrage quelconque d'une courbe C . La courbure est donnée par la formule suivante²

$$(1.1) \quad \kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

DÉMONSTRATION. Soit s une abscisse curviligne avec la même orientation que celle relative au paramètre t . On a donc $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(t)$. En dérivant cette relation par rapport à t , on obtient

$$\mathbf{T}'(s) \|\mathbf{r}'(t)\| = \mathbf{T}'(t)$$

ou encore en passant aux normes

$$(1.2) \quad \kappa(s) \|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{T}'(t)\|$$

On dérive alors par rapport à t la relation

$$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| \mathbf{T}(t)$$

pour obtenir

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|' \mathbf{T}(t) + \|\mathbf{r}'(t)\| \mathbf{T}'(t).$$

En exprimant $\mathbf{T}'(t)$ à l'aide du vecteur normal principal, il vient

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|' \mathbf{T}(t) + \|\mathbf{r}'(t)\| \|\mathbf{T}'(t)\| \mathbf{N}(t)$$

ou encore en utilisant la formule (1.2)

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|' \mathbf{T}(t) + \|\mathbf{r}'(t)\|^2 \kappa(t) \mathbf{N}(t).$$

Les relations $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{T}(t) = 0$ et $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{N}(t)| = \|\mathbf{r}'(t)\|$ permettent alors d'établir la formule (1.1). \square

EXEMPLE 4.10 (Droite). $\mathbf{r}''(t) = 0$ donne $\kappa(t) = 0$ par (1.1).

EXEMPLE 4.11 (Cercle). $\mathbf{r}''(\theta) = R[-\cos \theta, -\sin \theta]^\top$ donne $\kappa(\theta) = 1/R$.

EXEMPLE 4.12 (Graphe). On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$ et que la fonction f est convexe au voisinage de 0 (c'est-à-dire $f''(0) > 0$). On a

$$\mathbf{r}''(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ f''(0) \end{bmatrix}.$$

La formule (1.1) donne $\kappa(0) = f''(0)$.

On peut vérifier que, parmi tous les cercles passant par $\mathbf{r}(t)$, ayant comme tangente $\mathbf{T}(t)$ et dont le centre est vers la concavité de la courbe C paramétrée par (I, \mathbf{r}) , c'est le cercle de rayon $R(t) = 1/\kappa(t)$ qui approche la courbe C à l'ordre 2 au point $\mathbf{r}(t)$. On l'appelle **cercle osculateur** de la courbe C au point $\mathbf{r}(t)$. Son centre est le **centre de courbure** et son rayon le **rayon de courbure** de C au point $\mathbf{r}(t)$.

²Pour \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est le déterminant de la matrice ayant pour colonnes les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} . Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont orthogonaux et unitaires, le déterminant d'une matrice orthogonale donne $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 1$ si \mathbf{b} s'obtient par une rotation de \mathbf{a} de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique et -1 sinon. Il s'ensuit que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ où θ est l'angle orienté formé par les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .

2. Courbes en dimension 3

2.1. Propriétés analogues à celles des courbes planes. Une courbe C de \mathbb{R}^3 est définie de façon analogue à des courbes planes par des paramétrages (I, \mathbf{r}) avec maintenant

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

EXEMPLE 4.13 (Hélice circulaire). Elle est donnée par le paramétrage

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ at \end{bmatrix}.$$

En tout point $\mathbf{r}(t)$, la courbe C admet deux vecteurs unitaires tangents : $\mathbf{T}(t)$ dans le sens de l'orientation induite par le paramétrage et $-\mathbf{T}(t)$ dans le sens contraire.

Les vecteurs normaux à C au point $\mathbf{r}(t)$ forment un plan (orthogonal à la courbe au point $\mathbf{r}(t)$). Cependant, de même que pour le cas plan, un seul de ces vecteurs est le **vecteur normal principal**, il est défini par $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t) / \|\mathbf{T}'(t)\|$. Le **plan osculateur** est alors le plan engendré par les vecteurs $\mathbf{T}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$.

La courbure $\kappa(s)$ est encore définie à l'aide d'une abscisse curviligne par la relation $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$. Elle peut être évaluée dans un paramétrage quelconque t par l'adaptation de la formule (1.1)

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

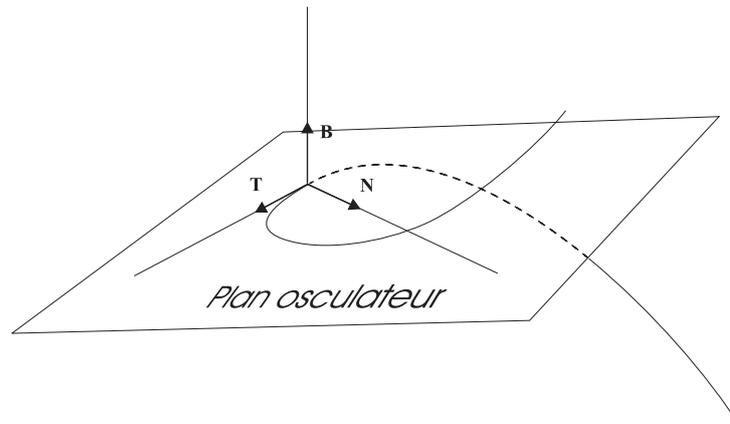
où maintenant $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ est le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{r}'(t)$ et $\mathbf{r}''(t)$.

2.2. Torsion des courbes gauches.

DÉFINITION 4.7. On suppose que le vecteur normal principal est défini. On peut définir alors la **binormale** par

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s).$$

Le repère direct $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ est appelé **trièdre de Frenet**.



On considère maintenant la relation $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 0$. Par dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s , on obtient

$$\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) + \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}'(s) = 0.$$

Comme $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$, on a

$$\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\kappa(s)\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 0.$$

Comme $\|\mathbf{B}(s)\| = 1$, on a aussi $\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 0$. Il en résulte que $\mathbf{B}'(s)$ est colinéaire à $\mathbf{N}(s)$

$$\mathbf{B}'(s) = -\omega(s)\mathbf{N}(s).$$

Le scalaire $\omega(s)$ mesure la variation de $\mathbf{B}(s)$, c'est-à-dire la tendance de la courbe C à s'écarter d'une courbe plane. (Pour une courbe plane, $\omega(s) \equiv 0$). Il est appelé la **torsion** de la courbe.

On dérive maintenant la relation $\mathbf{N}(s) = \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s)$

$$\mathbf{N}'(s) = \mathbf{B}'(s) \times \mathbf{T}(s) + \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}'(s)$$

pour obtenir les relations de Frenet suivantes qui sont très importantes en physique (par exemple dans les modèles de poutre)

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \omega(s)\mathbf{B}(s), \\ \mathbf{B}'(s) = -\omega(s)\mathbf{N}(s). \end{cases}$$

3. Surfaces

3.1. Type de surfaces considérées. Bien plus que pour les courbes, la description précise des surfaces, même avec un degré de restriction assez fort, demanderait de longs développements. Nous laisserons un caractère intuitif à cette description en disant que ce sont les surfaces qui s'obtiennent d'une façon analogue aux quasi-partitions du plan par partition sans recouvrement à l'aide de surfaces paramétrées. Nous supposons aussi que la jonction de ces surfaces paramétrées formant une surface donnée se fait le long de courbes simples.

Des exemples de telles surfaces sont obtenues en prenant des sphères, des tores, des cubes, des prismes, des tétraèdres et plus généralement des polyèdres pour lesquels les arêtes peuvent être des courbes et les faces des surfaces courbes, etc.

Beaucoup de surfaces, cependant, sont données directement par une équation, dite cartésienne, vérifiée par les coordonnées d'un point (x, y, z) qui y appartient. Nous verrons comment en fait ce type de surface rentre dans la description précédente.

3.2. Surfaces paramétrées.

DÉFINITION 4.8. Une surface paramétrée S correspond à la donnée d'un couple formé d'un domaine D du plan et d'une application

$$\begin{array}{l} \mathbf{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)) \end{array}$$

vérifiant

- (1) \mathbf{r} est indéfiniment dérivable sur D (i.e. les fonctions $(u, v) \mapsto r_1(u, v)$, $(u, v) \mapsto r_2(u, v)$, et $(u, v) \mapsto r_3(u, v)$ admettent des dérivées partielles à n'importe quel ordre,
- (2) l'image de D par \mathbf{r} est S (i.e. $S = \mathbf{r}(D)$),

- (3) les vecteurs $\partial_u \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v)$ et $\partial_v \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}'_v(u, v)$ ³ sont linéairement indépendants.

Souvent, il sera bien plus parlant de noter les composantes du point $\mathbf{r}(u, v)$ par

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

EXEMPLE 4.14 (Plan (représentation paramétrique)). *Un plan peut être défini par la donnée d'un point (x_0, y_0, z_0) appartenant au plan et de deux vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 non colinéaires donnant les coefficients directeurs de deux droites parallèles au plan. Pour cette raison, souvent, les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont appelés les vecteurs directeurs du plan. Un point de coordonnées (x, y, z) appartiendra au plan si et seulement si (x, y, z) est tel que $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 : $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$, avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Si on note par*

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \end{bmatrix}$$

les composantes respectives de \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 , on paramétrise le plan à l'aide de deux paramètres $u, v \in \mathbb{R}$ par

$$x(u, v) = x_0 + ue_{11} + ve_{12}, \quad y(u, v) = y_0 + ue_{21} + ve_{22}, \quad z(u, v) = z_0 + ue_{31} + ve_{32}.$$

On alors $\mathbf{r}'_u = \mathbf{e}_1$ et $\mathbf{r}'_v = \mathbf{e}_2$.

EXEMPLE 4.15 (Sphère). *On paramétrise la sphère de centre 0 et de rayon R à l'aide des coordonnées sphériques $r = R$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ par*

$$x(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z(\theta, \varphi) = R \cos \theta.$$

On a

$$\mathbf{r}'_\theta = R \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'_\varphi = R \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\|\mathbf{r}'_\theta\| = \sqrt{R^2 (\cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \sin^2 \theta)} = R$$

$$\|\mathbf{r}'_\varphi\| = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = R \sin \theta$$

car $0 < \theta < \pi$. Comme $\mathbf{r}'_\theta \cdot \mathbf{r}'_\varphi = 0$, les vecteurs \mathbf{r}'_θ et \mathbf{r}'_φ sont bien linéairement indépendants.

EXEMPLE 4.16 (Graphe). *Le graphe d'une fonction f indéfiniment dérivable de D dans \mathbb{R} :*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

est une surface paramétrée à l'aide de deux paramètres réels $(x, y) \in D$ par

$$r_1(x, y) = x, \quad r_2(x, y) = y, \quad r_3(x, y) = f(x, y).$$

³On notera qu'on distingue ici dans la notation entre un point de S qu'on désigne par ses trois coordonnées $\mathbf{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$ et le vecteur $\mathbf{r}'_u(u, v)$ qui est décrit par un vecteur colonne à trois lignes donnant ses **composantes** $\mathbf{r}'_u(u, v) = \begin{bmatrix} \partial_u r_1(u, v) \\ \partial_u r_2(u, v) \\ \partial_u r_3(u, v) \end{bmatrix}$. Pour ne pas compliquer

l'exposé, nous laisserons implicite et intuitive les cas où on identifie les points de \mathbb{R}^3 à des vecteurs colonne. Cette indention a déjà été évoquée dans les chapitres précédents où nous avons précisé qu'elle était due à l'identification d'un espace affine avec son espace sous-jacent.

On a

$$\mathbf{r}'_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x, y) \end{bmatrix}.$$

Clairement, \mathbf{r}'_x et \mathbf{r}'_y sont linéairement indépendants.

3.3. Plan tangent, normale et orientation.

DÉFINITION 4.9. Le plan tangent à une surface paramétrée S au point $\mathbf{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$ est le plan passant par $\mathbf{r}(u, v)$ et ayant comme vecteurs directeurs $\mathbf{r}'_u(u, v)$ et $\mathbf{r}'_v(u, v)$.

Ce plan est donc lui même paramétré par

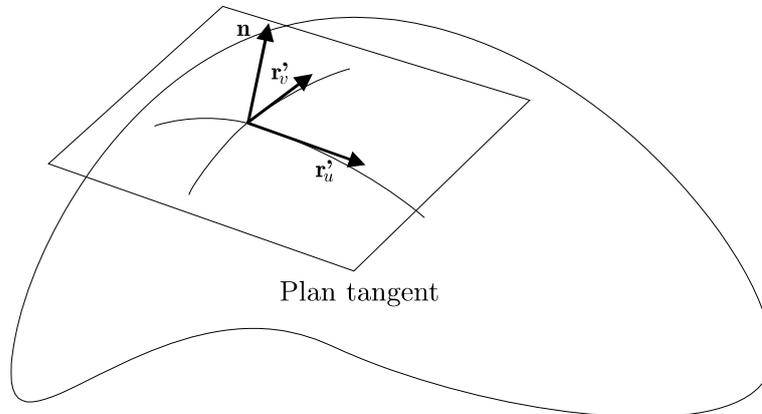
$$\begin{cases} x(s, t) = r_1(u, v) + s\partial_u r_1(u, v) + t\partial_v r_1(u, v) \\ y(s, t) = r_2(u, v) + s\partial_u r_2(u, v) + t\partial_v r_2(u, v) \\ z(s, t) = r_3(u, v) + s\partial_u r_3(u, v) + t\partial_v r_3(u, v) \end{cases}$$

La vérification du fait que le plan tangent ne dépend pas du paramétrage ne présente aucune difficulté. Elle est laissée à titre d'exercice. Nous verrons dans la suite une façon plus habituelle de décrire le plan tangent à l'aide de son équation cartésienne.

Un vecteur normal au plan tangent est par définition un vecteur normal à la surface S au point $\mathbf{r}(u, v)$. On définit ainsi une **normale unitaire** $\mathbf{n}(u, v)$ à la surface S au point $\mathbf{r}(u, v)$ par

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) / \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\|.$$

La figure suivante donne une représentation de la construction du plan tangent et de la normale à une surface.



Plan tangent et normale unitaire à une surface

La propriété $\|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| \neq 0$ est la traduction du fait que $\mathbf{r}'_u(u, v)$ et $\mathbf{r}'_v(u, v)$ sont linéairement indépendants.

En tout point d'une surface existe donc **deux normales unitaires** : \mathbf{n} et $-\mathbf{n}$. On fixe une orientation de la surface en choisissant un champ de vecteurs formé en tout point par une normale unitaire à la surface qui est continu. L'orientation d'une surface permet ainsi de distinguer les deux faces de la surface. Il existe des surfaces, surfaces de Möbius, sur lesquelles on ne peut pas fixer une orientation (elles sont dites alors non orientables). Elles sortent, cependant, du cadre des surfaces simples auxquelles nous nous sommes limités au début de cette section. Pour une surface paramétrée, le paramétrage induit une détermination continue de la normale unitaire et, donc, une orientation. Il est ainsi compatible avec l'orientation si le choix de la normale qu'il détermine coïncide

avec celle fixée par l'orientation de la surface et de sens contraire sinon. Pour une surface fermée Γ entourant un domaine Ω de l'espace, une orientation naturelle est fixée par le choix de la normale unitaire \mathbf{n} à Γ orientée vers l'extérieur de Ω .

3.4. Surfaces définies par une équation cartésienne.

3.4.1. *Cas du plan.* A partir de la description par une équation linéaire-affine d'un plan de \mathbb{R}^3 , nous déduisons la définition et les propriétés de base des surfaces décrites par une équation cartésienne, c'est à dire des coordonnées cartésiennes de l'espace. La définition est basée sur la propriété suivante.

PROPOSITION 4.6. *Soient a, b, c , trois nombres réels non tous nuls, c'est à dire tels que*

$$(3.1) \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \neq 0$$

et d donné aussi dans \mathbb{R} . L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$(3.2) \quad F(x, y, z) := ax + by + cz - d = 0$$

définit un plan P .

DÉMONSTRATION. Fixons $(x_0, y_0, z_0) \in P$. On a donc $(x, y, z) \in P$ si et seulement si

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

La relation précédente exprime en fait que $(x, y, z) \in P$ si et seulement si le vecteur $\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. La condition (3.1) et un résultat élémentaire de géométrie montrent alors la proposition. \square

L'équation (3.2) est appelée **l'équation cartésienne du plan**.

COROLLAIRE 4.1. *Soit un plan donné par sa représentation paramétrique*

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$$

où donc les composantes de $\mathbf{r}(u, v)$ sont données par

$$x(u, v) = x_0 + ue_{11} + ve_{12}, \quad y(u, v) = y_0 + ue_{21} + ve_{22}, \quad z(u, v) = z_0 + ue_{31} + ve_{32}.$$

Son équation cartésienne est donnée par

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & \partial_u x & \partial_v x \\ y - y_0 & \partial_u y & \partial_v y \\ z - z_0 & \partial_u z & \partial_v z \end{bmatrix} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que (x, y, z) appartient au plan si et seulement si

$$\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}_0 := \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ \partial_u z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \\ \partial_v z \end{bmatrix}$$

ne sont pas linéairement indépendants ; ce que exprime exactement la condition sur le déterminant. \square

REMARQUE 4.5. *En développant le déterminant par rapport à la 1^{ère} colonne, on retrouve bien une équation de la forme (3.2).*

Pour étendre cette définition à des surfaces plus générales, on remarque que la condition (3.1) peut être écrite de façon équivalente

$$\text{grad } F(x, y, z) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq 0.$$

Si on suppose que $\partial_z F(x, y, z) = c \neq 0$, (sinon, il suffit de changer le nom des variables), on peut voir qu'en fait le plan qui était défini par l'équation cartésienne (3.2) peut être défini de façon paramétrique comme le graphe fonctionnel

$$z = h(x, y) := (d - ax - by)/c.$$

Le théorème des fonctions implicites permet de généraliser cette propriété à des surfaces beaucoup plus générales avec, cependant, les restrictions suivantes :

- (1) La fonction h est seulement *implicite*, c'est à dire que son existence est assurée seulement de façon théorique et, dans la quasi totalité des cas, son expression n'est pas connue.
- (2) L'écriture comme graphe fonctionnel n'est pas globale mais seulement *autour d'un point* (x_0, y_0, z_0) .

3.4.2. *Surfaces données par une équation cartésienne.* Soit F indéfiniment dérivable sur un domaine U de \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant

$$\text{grad } F(x, y, z) \neq 0 \text{ pour } F(x, y, z) = 0.$$

On considère alors l'ensemble S , supposé non vide, des points (x, y, z) de U qui vérifient

$$(3.3) \quad F(x, y, z) = 0.$$

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 4.7. *Autour de tout point (x_0, y_0, z_0) , l'ensemble S est une surface paramétrée.*

DÉMONSTRATION. On a

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ et } \text{grad } F(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que $\partial_z F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer qu'autour de (x_0, y_0, z_0) , on a $\partial_z F(x, y, z) \neq 0$ et il existe une fonction h définie autour de (x, y) à valeur dans \mathbb{R} tel que $F(x, y, z) = 0$ si et seulement si

$$z = h(x, y).$$

Autour de (x_0, y_0, z_0) , S est ainsi un graphe fonctionnel. Elle est donc bien une surface paramétrée. \square

Le lemme suivant traduit la propriété bien connue en électrostatique : le champ électrique est normal aux surfaces équipotentielles.

LEMME 4.1. *Soit S une surface donnée par l'équation cartésienne (3.3) ; alors, $\text{grad } F(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in S$ est normal à S .*

DÉMONSTRATION. D'après ce qui précède, on sait qu'autour de $(x_0, y_0, z_0) \in S$, on a

$$(3.4) \quad F(x, y, h(x, y)) = 0$$

En dérivant cette relation respectivement en x puis en y , il vient

$$(3.5) \quad \begin{cases} \partial_x F(x, y, h(x, y)) + \partial_x h(x, y) \partial_z F(x, y, h(x, y)) = 0, \\ \partial_y F(x, y, h(x, y)) + \partial_y h(x, y) \partial_z F(x, y, h(x, y)) = 0. \end{cases}$$

Comme les vecteurs tangents à la surface donnée par le graphe fonctionnel $z = h(x, y)$ s'obtiennent par

$$\mathbf{r}'_x(x, y) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x h(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'_y(x, y) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y h(x, y) \end{bmatrix},$$

on a directement

$$\text{grad } F(x, y, h(x, y)) \cdot \mathbf{r}'_x(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \text{grad } F(x, y, h(x, y)) \cdot \mathbf{r}'_y(x, y) = 0.$$

Ceci démontre le lemme. \square

On déduit de ce lemme l'équation cartésienne du plan tangent à une surface donnée elle-même par une équation cartésienne.

PROPOSITION 4.8. *L'équation d'un plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) à une surface S , donnée par l'équation cartésienne (3.3) est donnée par*

$$\boxed{\partial_x F(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \partial_z F(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.}$$

DÉMONSTRATION. La relation exprime que le vecteur $\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$ est orthogonal à la normale au plan tangent. Le point (x, y, z) y appartient donc car (x_0, y_0, z_0) est lui-même un point de celui-ci. \square

Eléments d'analyse vectorielle

1. Intégrales curvilignes

Les intégrales curvilignes sont des intégrales dont le domaine d'intégration est une courbe. Les intégrales curvilignes seront d'abord définies pour des courbes du plan et ensuite généralisées aux courbes de l'espace.

1.1. Définition. On définit d'abord l'intégrale d'une fonction f sur une courbe (ou un arc de courbe) simple. L'intégrale sur une courbe, définie par "chaînage" d'arcs de courbe simples, est obtenue en sommant toutes les intégrales sur chaque arc.

DÉFINITION 5.1. Soient un arc de courbe simple fermé C et f une fonction définie sur C . L'intégrale curviligne de f sur C est définie par l'intégrale (lorsqu'elle existe)

$$(1.1) \quad \int_C f(v) dC = \int_a^b f(x(s), y(s)) ds$$

où $([a, b], \mathbf{m})$ est un paramétrage à l'aide d'une abscisse curviligne s de C . On notera que $a < b$. En particulier, si f est la fonction constante $\equiv 1$, l'intégrale curviligne (1.1) donne simplement la longueur de la courbe qui est ici égale à $b - a$.

La proposition suivante montre que la définition est consistante.

PROPOSITION 5.1. L'intégrale curviligne (1.1) ne dépend pas de l'abscisse curviligne qui sert à la définir.

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma, c \leq \sigma \leq d$, une autre abscisse curviligne. Comme $\mathbf{r}'(\sigma)\alpha'(s) = \mathbf{m}'(s)$ et $\mathbf{r}'(\sigma) = \mathbf{T}(\sigma)$, on a $\mathbf{m}'(s) = \pm \mathbf{T}'(\sigma)$ et donc $|\alpha'(s)| = 1$. Il en résulte que

$$\sigma = \alpha(s) = \varepsilon s + \gamma, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Ayant par définition du paramétrage

$$(u(\sigma), v(\sigma)) = (u(\alpha(s)), v(\alpha(s))) = (x(s), y(s)),$$

il vient

$$\int_c^d f(u(\sigma), v(\sigma)) d\sigma = \int_a^b f(x(s), y(s)) ds$$

sachant que $(c = \alpha(a), d = \alpha(b))$ si $\varepsilon = 1$ et $(c = \alpha(b), d = \alpha(a))$ si $\varepsilon = -1$. □

Il est plus commode d'exprimer cette intégrale en utilisant un paramétrage quelconque. Ceci est donné par la proposition suivante.

PROPOSITION 5.2. Soit $([a, b], \mathbf{r})$ un paramétrage d'un arc simple fermé C . L'intégrale curviligne de f sur C est donnée par

$$(1.2) \quad \boxed{\int_C f(v) dC = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}$$

DÉMONSTRATION. Soit s une abscisse curviligne compatible avec l'orientation induite par le paramétrage

$$\mathbf{m}(s) = (u(s), v(s)) = (x(t), y(t))$$

avec $c \leq s = \alpha(t) \leq d$ et donc $\alpha'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Le changement de variable donné par la fonction α établit directement la proposition. \square

EXEMPLE 5.1. Pour f définie par $f(x, y) = x$ et C la courbe $\{y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$, on a

$$\int_C x dC = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[\frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$$

1.2. Circulation d'un champ de vecteurs. Les intégrales curvilignes sont utilisées en physique surtout pour calculer le travail d'un champ de forces. Ce problème s'énonce de la façon suivante. Soit

$$(x, y) \rightarrow \mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

un champ de vecteurs défini au voisinage d'une courbe C . (Ce champ de vecteurs représente le champ de forces.) La **circulation** de \mathbf{F} le long de C , pour une **orientation fixée** sur C , est définie par l'intégrale curviligne

$$\int_{C_\circ} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m} = \int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(x, y) dC$$

où \mathbf{T} est le vecteur unitaire tangent à C fixé par l'orientation de la courbe C ; la notation C_\circ indique que l'intégrale est définie sur une courbe orientée, le contexte ou une notation explicite précisent le sens de l'orientation.

REMARQUE 5.1. La propriété immédiate suivante est souvent très utile

$$(1.3) \quad \int_{C_\circ} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m} = - \int_{C_\circ} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m}$$

où C_\circ indique l'orientation contraire de celle qui a été fixée sur C par C_\circ . \square

La proposition suivante permet de calculer commodément cette intégrale à partir d'un paramétrage quelconque de C .

PROPOSITION 5.3. Soit $([a, b], \mathbf{r})$ un paramétrage de C . Alors,

$$\boxed{\int_{C_\circ} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m} = \varepsilon \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt}$$

avec $\varepsilon = +1$ si le paramétrage est compatible avec l'orientation et $\varepsilon = -1$ sinon.

DÉMONSTRATION. La formule (1.3) permet de se ramener au cas où le paramétrage est compatible avec l'orientation. Comme $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) / \|\mathbf{r}'(t)\|$, on obtient directement la proposition à partir de la formule (1.2). \square

EXEMPLE 5.2. Calculons le travail de la pesanteur, opposé de la variation de l'énergie potentielle, lorsqu'une particule de masse m parcourt une courbe du plan d'un point $A = (x_A, y_A)$ au point $B = (x_B, y_B)$. Cette courbe est paramétrée par (I, \mathbf{r}) de façon compatible compatible avec le sens de parcours de la courbe, c'est-à-dire avec $\mathbf{r}(a) = A$ et $\mathbf{r}(b) = B =$

(x_B, y_B) . On note par g l'accélération de la pesanteur. La force exercée par la pesanteur est donnée par

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}.$$

Il vient donc

$$\int_{C_O} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m} = \int_a^b (-mg)y'(t) dt = (-mg)(y(b) - y(a)) = mg(y_A - y_B).$$

Pour ce cas particulier, l'intégrale curviligne ne dépend pas de la courbe choisie pour joindre le point A au point B . Le type de champ pour lequel cette propriété a lieu est dit **conservatif**. Nous donnons maintenant une condition suffisante assurant qu'un champ est conservatif. Cela nous permettra d'introduire le premier des trois opérateurs différentiels usuels en physique.

Soit u une fonction continument dérivable¹ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que le gradient de u sur D est le champ de vecteurs $\text{grad } u$ défini par

$$\text{grad } u(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x u(x, y) \\ \partial_y u(x, y) \end{bmatrix}.$$

On a alors.

PROPOSITION 5.4. *Le champ $\text{grad } u$ est conservatif.*

DÉMONSTRATION. Reprenons les notations de l'exemple ci-dessus. Il vient

$$\int_{C_O} \text{grad } u(x, y) \cdot d\mathbf{m} = \int_a^b \{\partial_x u(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y u(x(t), y(t))y'(t)\} dt.$$

Considérons la fonction composée définie de $[a, b]$ dans \mathbb{R} par

$$\varphi(t) = u(x(t), y(t)).$$

Le théorème de dérivation des fonctions composées donne

$$\varphi'(t) = \partial_x u(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y u(x(t), y(t))y'(t).$$

Il s'ensuit que

$$\int_{C_O} \text{grad } u(x, y) \cdot d\mathbf{m} = \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a) = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A).$$

L'intégrale curviligne ne dépend que de la variation de la fonction u entre le point A et le point B . Ceci établit la proposition. \square

1.3. Notion de différentielle. Nous ne donnerons pas la définition rigoureuse de la notion de différentielle. Cela nécessiterait l'introduction de certains développements d'algèbre linéaire qui dépassent le cadre de ce cours. Nous lui laisserons un caractère intuitif assez proche de la définition rigoureuse.

On commence par les fonctions d'une variable $y = f(x)$. Si on note par dx la différentielle de la variable x et par dy celle de la variable y , la différentielle de la variable y est donnée à l'aide de celle de la variable x par

$$dy = f'(x) dx.$$

¹Rappelons que cela peut être défini en demandant que u admet des dérivées partielles continues sur D .

Cette relation exprime que pour tout accroissement Δx de la variable x , l'accroissement Δy de la variable y se calcule à partir de Δx par

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \varepsilon(x, \Delta x)$$

où $\varepsilon(x, \Delta x)$ est une quantité dépendant de x et de Δx telle que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(x, \Delta x) = 0$. On peut éviter de considérer la variable y et définir directement la différentielle de la fonction f par

$$df = f'(x) dx.$$

Considérons maintenant une fonction de deux variables $z = f(x, y)$. La formule

$$\begin{cases} \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \\ \Delta z = \partial_x f(x, y)\Delta x + \partial_y f(x, y)\Delta y + \|(\Delta x, \Delta y)\| \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y), \end{cases}$$

avec $\lim_{\|(\Delta x, \Delta y)\| \rightarrow 0} \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y) = 0$, suggère de définir

$$dz = \partial_x f(x, y)dx + \partial_y f(x, y)dy.$$

Là aussi, on peut se passer de la variable z et définir directement

$$df = \partial_x f(x, y)dx + \partial_y f(x, y)dy.$$

Soit maintenant une fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ d'une variable réelle t à valeurs dans \mathbb{R}^2 et $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables réelles à valeurs dans \mathbb{R} de sorte qu'on puisse les composer et définir $t \mapsto g(t) := f(x(t), y(t))$. La différentielle de la fonction g s'obtient par la règle de la chaîne

$$dg = g'(t)dt = (\partial_x f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t))y'(t))dt$$

et se retrouve directement à l'aide de la différentielle $df = \partial_x f(x, y)dx + \partial_y f(x, y)dy$ de f en faisant dépendre les variables x et y de la variable t .

Plus généralement, on définit une forme différentielle sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ par la donnée de deux fonctions $(x, y) \mapsto f(x, y)$ et $(x, y) \mapsto g(x, y)$, définies sur D , par

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

La différentielle d'une fonction à deux variables est **une forme différentielle particulière** qui, modulo l'identification des composantes $f(x, y)$ et $g(x, y)$ aux composantes d'un champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y)$ du plan par

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

est une autre façon de décrire le gradient de cette fonction.

En utilisant précisément cette identification, on définit l'intégrale d'une forme différentielle $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ sur l'arc de courbe orienté C_\circlearrowright par

$$\boxed{\int_{C_\circlearrowright} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_{C_\circlearrowright} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m}.}$$

On déduit alors de la proposition 5.3, la proposition suivante.

PROPOSITION 5.5. *Soit un paramétrage $([a, b], \mathbf{r})$ de la courbe orientée C_\circlearrowright , compatible avec l'orientation. Alors,*

$$\boxed{\int_{C_\circlearrowright} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_a^b (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)) dt.}$$

DÉMONSTRATION. Comme $\mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)$, la proposition 5.3 donne le résultat. \square

Pour une courbe C , formée d'un "chaînage" d'arcs de courbes simples $\{C_i\}_{i=1}^{i=N}$, le choix d'une orientation sur C induit une orientation sur chaque C_i . On définit alors

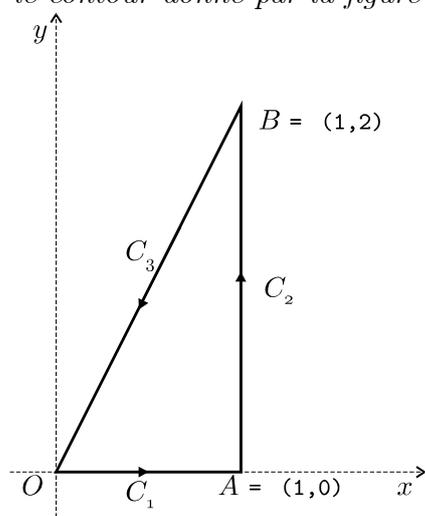
$$\int_{C_\circ} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m} = \sum_{i=1}^N \int_{C_{i_\circ}} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{m},$$

$$\int_{C_\circ} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \sum_{i=1}^N \int_{C_{i_\circ}} f(x, y)dx + g(x, y)dy.$$

EXEMPLE 5.3. Calcul de

$$\int_{C_\circ} x^2y dx + x dy$$

sur le contour donné par la figure ci-dessous orientée dans le sens trigonométrique.



On calcule l'intégrale séparément sur C_1 , C_2 et C_3 et on somme le résultat :

(1) **Intégrale sur C_1 .**

Paramétrisation :

$$[0, 1] \ni x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Intégrale :

$$\int_{C_{1_\circ}} x^2y dx + x dy = \int_0^1 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 x \cdot 0 dx = 0$$

car $y(x) = y'(x) = 0$.

(2) **Intégrale sur C_2 .**

Paramétrisation :

$$[0, 2] \ni y \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}$$

Intégrale :

$$\int_{C_{2_\circ}} x^2y dx + x dy = \int_0^2 1^2 \cdot y \cdot 0 dy + \int_0^2 1 \cdot 1 dy = 2.$$

(3) **Intégrale sur C_3 .**

Paramétrisation :

$$[0, 1] \ni t \longmapsto (1-t) \begin{bmatrix} x_B = 1 \\ y_B = 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_O = 0 \\ y_O = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) = 1-t \\ y(t) = 2(1-t) \end{bmatrix}$$

Intégrale :

$$\int_{C_3} x^2 y dx + x dy = \int_0^1 (1-t)^2 \cdot 2(1-t) \cdot (-1) dt + \int_0^1 (1-t) \cdot (-2) dy = -\frac{3}{2}.$$

L'intégrale sur C_\circ est donnée alors par

$$\int_{C_\circ} x^2 y dx + x dy = 0 + 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

1.4. Courbes dans l'espace. Toutes les notions précédentes s'étendent directement aux courbes de \mathbb{R}^3 .

L'intégrale curviligne d'une fonction f sur une courbe de \mathbb{R}^3 est définie par

$$\boxed{\int_C f(v) dv = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s)) ds}$$

où s est une abscisse curviligne sur la courbe C et peut être évaluée en utilisant un paramétrage quelconque $([c, d], \mathbf{r})$ par

$$\boxed{\int_C f(v) dv = \int_c^d f(u(t), v(t), w(t)) \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t) + w'^2(t)} dt.}$$

La circulation d'un champ de vecteurs \mathbf{F} le long d'un arc orienté est donnée par

$$(1.4) \quad \boxed{\int_{C_\circ} \mathbf{F}(v) \cdot d\mathbf{m} = \int_C \mathbf{F}(v) \cdot \mathbf{T}(v) dC}$$

où, là encore, $\mathbf{T}(v)$ est le vecteur tangent unitaire à C fixé par l'orientation C_\circ .

Dans le cas où \mathbf{F} est un gradient

$$\boxed{\mathbf{F}(x, y, z) = \text{grad } u(x, y, z) := \begin{bmatrix} \partial_x u(x, y, z) \\ \partial_y u(x, y, z) \\ \partial_z u(x, y, z) \end{bmatrix}}$$

le champ \mathbf{F} est conservatif. Si C_\circ est un arc simple fermé, orienté de son extrémité A vers son extrémité B , on a

$$\boxed{\int_{C_\circ} \text{grad } u(x, y, z) \cdot d\mathbf{m} = u(x_B, y_B, z_B) - u(x_A, y_A, z_A).}$$

La circulation (1.4) permet aussi de définir l'intégrale de la forme différentielle, définie maintenant sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ par

$$\int_{C_\circ} f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz = \int_a^b (f(x(t), y(t), z(t))x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.$$

2. Formules de Green

La formule de Green permet de ramener, dans certaines conditions, une intégrale double à une intégrale curviligne sur la courbe qui délimite le domaine d'intégration.

2.1. Théorème de Green-Riemann. Un domaine borné du plan, simplement connexe du plan, sera pour nous un domaine borné D du plan dont la frontière Γ est une courbe simple, fermée, formée d'un chaînage d'un nombre fini d'arcs de courbe simples.

On munit Γ d'une orientation de sorte que lorsqu'on la parcourt dans le sens de cette orientation, on voit le domaine D à gauche et son extérieur à droite.

On a alors le théorème suivant, dit de Green-Riemann, qui donne une première forme de la formule de Green.

THÉORÈME 5.1. *Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de D . Alors,*

$$(2.1) \quad \boxed{\int_D (\partial_x g - \partial_y f) dx dy = \int_{\Gamma_\circ} f(x, y) dx + g(x, y) dy.}$$

DÉMONSTRATION. Nous ferons la démonstration dans le cas d'un domaine D compris entre deux graphes

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x) < y < \psi(x), a < x < b\}.$$

On a d'abord

$$\begin{aligned} \int_D (-\partial_y f) dx dy &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (-\partial_y f(x, y)) dy \right\} dx \\ &= \int_a^b \{f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))\} dx \end{aligned}$$

On vérifie directement que

$$\int_a^b \{f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))\} dx = \int_{\Gamma_\circ} f(x, y) dx$$

On écrit ensuite

$$\int_D \partial_x g dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_x g(x, y) dy \right\} dx.$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme permet alors d'exprimer l'intégrale intérieure par

$$\partial_x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_x g(x, y) dy + g(x, \psi(x))\psi'(x) - g(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \int_D \partial_x g \, dx dy &= \int_a^b \left\{ \partial_x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x, y) \, dy \right\} dx + \\ &\quad \int_a^b g(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \, dx - \int_a^b g(x, \psi(x)) \psi'(x) \, dx \\ &= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} g(b, y) \, dy - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} g(a, y) \, dy + \\ &\quad \int_a^b g(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \, dx - \int_a^b g(x, \psi(x)) \psi'(x) \, dx. \end{aligned}$$

On vérifie alors directement que

$$\int_D \partial_x g \, dx dy = \int_{\Gamma_\circ} g(x, y) \, dy.$$

□

2.2. Formule de la divergence. Sous la forme donnée par le théorème précédent, la formule de Green n'apparaît pas clairement comme une généralisation de la formule d'intégration par partie des intégrales simples. Nous allons dans ce paragraphe en donner une forme équivalente qui fera mieux ressortir cet aspect. Cette forme, dite formule ou théorème de la divergence, est souvent utilisée en physique pour décrire des propriétés de conservation : conservation de la masse, de la charge, de la quantité de mouvement, etc.

L'énoncé de cette formule utilise le second des trois opérateurs différentiels usuels en physique : **l'opérateur de la divergence**. C'est un opérateur, qui de façon symétrique au gradient, transforme un champ de vecteurs

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{bmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{bmatrix}$$

défini de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine D du plan en une fonction définie sur D par

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) = \partial_x v_1(x, y) + \partial_y v_2(x, y).}$$

La fonction $\operatorname{div} \mathbf{v}$ est appelée **la divergence** de \mathbf{v} .

THÉORÈME 5.2. *Désignons par \mathbf{n} la normale unitaire à la frontière Γ du domaine D , orientée vers l'extérieur de D , comme l'indique la figure 1. Si \mathbf{v} est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de D , on a*

$$(2.2) \quad \int_D \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

DÉMONSTRATION. La formule de Green-Riemann (2.1) donne

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy = \int_D (\partial_x v_1 + \partial_y v_2) \, dx dy = \int_{\Gamma_\circ} (-v_2 \, dx + v_1 \, dy).$$

L'intégrale de la forme différentielle du second membre peut être écrite aussi sous la forme de la circulation du champ $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$ le long de Γ pour la même orientation. En notant

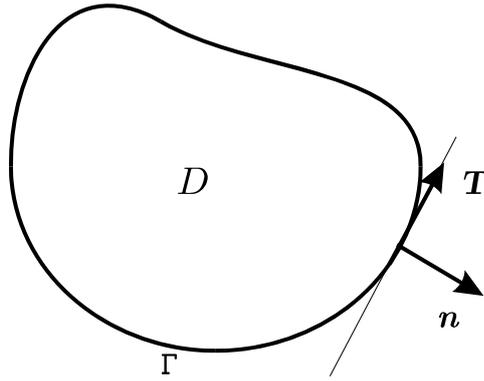


FIG. 1. Normale unitaire extérieure

par \mathbf{T} le vecteur tangent unitaire à Γ , orientation dans le sens de cette orientation, on a ainsi

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{v} \, dxdy = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma.$$

Il suffit alors de remarquer que \mathbf{T} s'obtient par une rotation de $\pi/2$ de \mathbf{n} dans le sens direct pour pouvoir exprimer les composantes T_1 et T_2 de \mathbf{T} à partir de celles de \mathbf{n}

$$T_1 = -n_2, \quad T_2 = n_1.$$

On a donc $\mathbf{w} \cdot \mathbf{T} = (-v_2)(-n_2) + v_1 n_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Ceci démontre le théorème. \square

On déduit de ce théorème la formule d'intégration par partie. Supposons que

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La formule (2.2) donne

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{v} \, dxdy = \int_D \partial_x f \, dxdy = \int_{\Gamma} f n_1 \, d\Gamma.$$

Il s'ensuit, sachant que $\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u$

$$\int_D v \partial_x u \, dxdy = - \int_D u \partial_x v \, dxdy + \int_{\Gamma} u v n_1 \, d\Gamma.$$

On a de même bien sûr

$$\int_D v \partial_y u \, dxdy = - \int_D u \partial_y v \, dxdy + \int_{\Gamma} u v n_2 \, d\Gamma.$$

EXERCISE 5.1. *L'opérateur différentiel suivant*

$$\Delta u := \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u,$$

appelé laplacien (scalaire) de la fonction u est à la base de multiples modèles mathématiques de la physique. Utiliser les formules d'intégration par partie précédentes pour obtenir les formules de Green suivantes qui sont essentielles dans de nombreuses études relatives à cet opérateur :

– **Demi-formule de Green pour le laplacien.**

$$\int_D v \Delta u \, dxdy + \int_D \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dxdy = \int_{\Gamma} v \partial_n u \, d\Gamma$$

où $\partial_{\mathbf{n}}u$ est la dérivée de v le long de la normale \mathbf{n} donnée par

$$\partial_{\mathbf{n}}u := \text{grad } u \cdot \mathbf{n} = n_1 \partial_x u + n_2 \partial_y u.$$

– **Formule de Green pour le laplacien.**

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) \, dx dy = \int_{\Gamma} (v \partial_{\mathbf{n}} u - u \partial_{\mathbf{n}} v) \, d\Gamma$$

3. Intégrales de surfaces

3.1. Intégrale sur une surface paramétrée. Sur une surface paramétrée S , l'élément d'aire est défini par

$$dS = \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| \, dudv.$$

L'intégrale d'une fonction f définie sur S est ainsi définie par

$$\int_S f(v) \, dS = \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| \, dudv.$$

La vérification que l'intégrale ne dépend pas du paramétrage est une conséquence de la formule de changement de variable dans une intégrale double. Elle est laissée à titre d'exercice.

EXEMPLE 5.4 (Aire de la sphère de rayon R). On la détermine en suivant les étapes suivantes.

– **Paramétrage.** On utilise le paramétrage donné plus haut par les coordonnées sphériques

$$\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi) = R \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \times R \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = R^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix}$$

– **Élément d'aire.**

$$\|\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi)\| = R^2 \sin \theta$$

car $0 < \theta < \pi$.

– **Aire de S .**

$$R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = 4\pi R^2.$$

3.2. Théorème de la divergence. On a alors la généralisation du théorème de la divergence (**formule d'Ostrogradski**) dont la démonstration, admise, est dans ses grandes lignes analogue au cas bidimensionnel.

THÉORÈME 5.3. Soit \mathbf{u} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 au voisinage d'un domaine Ω borné de l'espace. On note par Γ la frontière de Ω qu'on suppose être du type des surfaces simples considérées dans ce cours. On note aussi par \mathbf{n} le champ de vecteurs formé par la normale unitaire à Γ orientée vers l'extérieur de Ω . On a alors

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \, dx dy dz = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma.$$

On a noté par $\text{div } \mathbf{u} = \partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3$ la divergence du champ de vecteurs \mathbf{u} .

L'intégrale

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

est appelé **le flux du champ de vecteurs \mathbf{u} à travers la surface Γ** .

Les formules de Green relatives au laplacien, donné pour un domaine et un champ du plan, se transposent directement pour le cas tridimensionnel.

3.3. Formule de Stokes. La formule de Stokes est la généralisation du théorème de Green aux surfaces. On a besoin pour l'énoncer d'introduire le troisième opérateur usuel en physique : **le rotationnel**. Le rotationnel d'un champ de vecteurs \mathbf{u} défini sur un domaine de l'espace \mathbb{R}^3 est défini en coordonnées cartésiennes par

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad \text{rot } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_y h - \partial_z g \\ \partial_z f - \partial_x h \\ \partial_x g - \partial_y f \end{bmatrix}$$

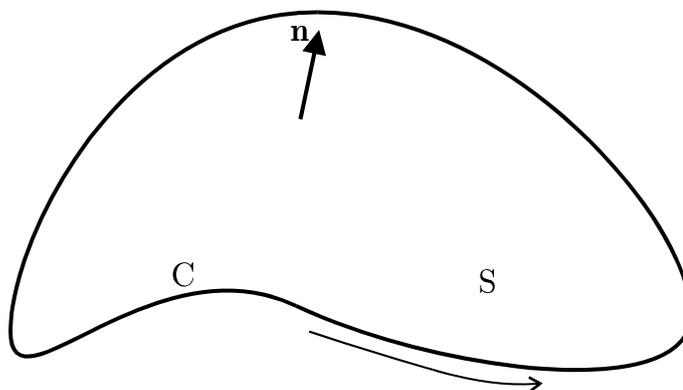
On pourra retenir la formule donnant les composantes du rotationnel en coordonnées cartésiennes en utilisant la règle formelle suivante faisant usage du vecteur symbolique “nabla” ∇

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}, \quad \text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}.$$

On notera aussi, comme cela est utilisé souvent dans les ouvrages, simplement par $\nabla \times \mathbf{u}$ le rotationnel du vecteur \mathbf{u} . On a une notation analogue pour le gradient et la divergence

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \partial_x f + \partial_y g + \partial_z h.$$

Soit une surface ouverte S limitée par une courbe simple C . Le choix d'une normale unitaire sur S permet d'orienter la surface S , c'est-à-dire de distinguer une face “supérieure” et une face “inférieure” en assimilant la normale à un vecteur dirigé vers le “haut”. Cette orientation induit une orientation pour sa frontière C qui est celle obtenue en parcourant la courbe sur la face supérieure de la surface de sorte que la surface soit vue à gauche. La figure suivante indique la correspondance entre les deux orientations. Il est clair que, de la même façon, une orientation de la courbe C induit une orientation de la surface, c'est-à-dire un choix pour la normale à S .



Orientations respectives d'une surface et de son bord

Le théorème de Stokes énonce que le flux du rotationnel d'un champ de vecteurs à travers une surface ouverte S est égal à la circulation de ce champ le long de la courbe C qui la délimite, l'orientation étant fixée soit par celle de S soit par celle de C .

THÉORÈME 5.4. *Avec les notations précédentes, si un champ \mathbf{u} est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de S , alors on a la **formule de Stokes***

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{C_O} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{m}}$$

La démonstration nécessite quelques développements. Elle sera admise dans ce cours.

