INSA TOULOUSE
Département STPI, $2^{\text{ème}}$ année IC

Année 2013-2014

# Feuille de TD numéro 3

## Exercice 1.

Calculer l'aire du domaine $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x \leq 2,\ y \leq x,\ y \leq (x-2)^2\}$.

## Exercice 2.

On considère l'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$. Calculer $\displaystyle\int_C f(x,y)dxdy$ lorsque :

1. $f(x,y) = \sin(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1})$.
2. $f(x,y) = y^2$.

## Exercice 3.

Soit $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et $K_R = [0,R] \times [0,R]$, pour $R > 0$.

1. Calculer $\int_{D_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. Montrer que, pour tout $R > 0$, on a les inégalités suivantes:
$$\int_{D_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \int_{K_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \int_{D_{\sqrt{2}R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
3. En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale de Gauss: $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

## Exercice 4.

Identifier les ensembles suivants et calculer leur volume:

1. $D_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ avec $a,b,c > 0$. Qu'obtient-on dans le cas particulier $a = b = c = 1$ ?
2. $D_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x+y+z \leq 1\right\}$.

## Exercice 5.

Soit une plaque homogène dont la forme est donnée par
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-9 < 0,\ (x-1)^2+y^2 > 1\}.$$

1. Représenter graphiquement $D$ et justifier que l'axe $Ox$ est un axe de symétrie pour $D$.
2. Calculer les coordonnées $(x_G, y_G)$ du centre d'inertie (centre de gravité) $G$ de la plaque:
$$x_G = \frac{\int_D xdxdy}{\int_D dxdy}, \quad y_G = \frac{\int_D ydxdy}{\int_D dxdy}.$$