Feuille de TD numéro 2

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$:
   $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq b\}$ est fermé et $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < b\}$ est ouvert.
2. En déduire la nature des ensembles suivants:
   $$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leq 4\}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\},$$
   $$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 - 4z + 3y \leq 3\}.$$
   Dans les cas appropriés, on vérifiera également s'il s'agit d'un compact.

Exercice 2.

On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les dérivées partielles de f et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et en déduire que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice jacobienne de f ainsi que son jacobien.
2. Mêmes questions pour l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
   $$g(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Écrire l'équation du plan tangent à $\mathcal{C}_f$ au point $(1, 1)$.

Exercice 5.

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que:

$$\partial_x f(x, y) + 2x\partial_y f(x, y) = 0, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(u, v) = (u, v + u^2)$.

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Montrer que ϕ est une bijection et déterminer son inverse ϕ^{-1}.

3. Posons $g = f \circ \phi$. Montrer que f est solution de l'équation (1) si et seulement si

$$\partial_u g(u, v) = 0, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

4. En déduire que f est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation (1) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x, y) = h(y - x^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$. On cherche les applications f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \forall (x, y) \in U. \tag{2}$$

1. U est-il ouvert ? fermé ? compact ?

2. Etant donné f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on définit g dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par $g(x+y, x-y) = f(x, y)$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

3. En déduire les solutions de l'équation (2).

Exercice 7.

Soit f une fonction définie sur un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On dit que f admet un minimum (resp. maximum) local au point $a \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(x) \geq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \leq f(a)), \quad \forall x \in B_r(a) = \{x \in \Omega : ||x - a|| < r\}.$$

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Montrer que si $a \in \Omega$ est un point d'extremum local (minimum ou maximum), alors a est un point critique de f, c'est-à-dire qu'il vérifie les conditions:

$$\partial_{x_i} f(a) = 0, \forall i = 1, \ldots, N.$$

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Montrer que si $Hf(a)$, la matrice hessienne de f au point critique a, est définie positive (resp. définie négative), alors ce point critique a est un minimum (resp. maximum) local de f.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

   (a) Déterminer ses points d'extremum local (ainsi que leur nature).

   (b) Écrire le développement de Taylor-Young au voisinage de ces points.

   (c) Montrer que -9 est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^2$.