Feuille de TD numéro 1

Exercice 1.

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}.$$

On exprimera le polynôme Δ_2 sous forme d'un produit de facteurs.

Exercice 2.

On considère la matrice réelle A de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de A et écrire la matrice semblable à A dans cette base.

Exercice 3.

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ par :

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire de $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver la matrice A de f dans la base $\mathcal{E}$.
3. Trouver la matrice B de f dans la base $\mathcal{U} = \{u_1 = (1,0), u_2 = (1,1)\}$ et donner ensuite l'expression de f dans cette base.
4. Vérifier la formule $B = P^T A P$, où P est la matrice de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$.

Exercice 4.

Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien canonique muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit le polynôme homogène en x, y, z et de degré 2 :

$$q(v) = x^2 - 2yz + xz,$$

où $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que ce polynôme est une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Écrire la forme polaire associée.
2. Écrire la matrice A de q dans la base $\mathcal{E}$.
3. On considère la nouvelle base $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$:

$$\varepsilon_1 = e_1,\ \varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 - 4e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}e_1 + e_3.$$

   (a) Écrire la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$. Donner l'expression de q dans cette nouvelle base.

   (b) q est-elle définie, positive ?

Exercice 5.

Pour tout réel a, on considère la forme quadratique

$$q_a(x, y, z) = (2a+1)x^2 + 2ay^2 + (2a+1)z^2 - 2xz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

On notera f_a la forme polaire associée à q_a.

1. On suppose $a = 0$. f_0 est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.
2. On suppose $a = 1$. f_1 est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.
3. Discuter suivant les valeurs de a si $(\mathbb{R}^3, f_a)$ est un espace euclidien.

Exercice 6.

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer une base orthogonale du sous espace vectoriel E engendré par les vecteurs u_1 et u_2 : $u_1^T = [1, 0, 0, -1]$ et $u_2^T = [-1, -1, 1, 1]$. En déduire une base orthonormée de E.
2. Déterminer $E^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4; \langle v, u_i \rangle = 0, i = 1, 2\}$. En déduire une base orthonormée de $E^\perp$.
3. En déduire une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ différente de la base canonique.
4. Écrire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice de la projection orthogonale sur E.
5. Déterminer les composantes de v ($v^T = [1, 2, -1, -2]$) dans la base $\mathcal{B}$.
6. Donner une décomposition de v en la somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de $E^\perp$. Vérifier le théorème de Pythagore.

Exercice 7.

Soit u un vecteur non nul de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$ et soit U sa matrice colonne dans la base canonique.
On définit par P_u la matrice suivante:

$$P_u = I_n - \frac{1}{||U||^2} U U^T$$

et on notera p_u l'application linéaire associée à P_u.

1. Montrer que la matrice P_u est symétrique.
2. Soit D la droite vectorielle engendrée par u.
   (a) Montrer que $\forall v \in D$, $p_u(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   (b) Montrer que $\forall w \in D^\perp$, $p_u(w) = w$.
   (c) En déduire la nature géométrique de la transformation définie par p_u.

Exercice 8.

Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien canonique. On considère la matrice

$$A_a = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2a & 6 & -3 \\ -6a & 3 & 2 \\ 3a & 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice A_a soit orthogonale.
2. On suppose $a = 1$. Montrer que A_1 est la matrice d'une rotation autour d'un axe dont on déterminera l'axe et l'angle.

Exercice 9.

Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, orienté par la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la forme quadratique

$$q(x, y, z) = 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy + 4yz.$$

On admettra que les valeurs propres de la matrice de q sont les réels 3, 6 et 9.

1. Déterminer une base orthonormée directe notée $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ et des réels λ, μ et ν tels que si $v = Xb_1 + Yb_2 + Zb_3$, alors $q(v) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$.
2. Soit P la matrice de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que P est orthogonale.
   (b) Préciser la nature de la transformation géométrique associée à la matrice P.