

Exercices supplémentaires

Exercice 1.

le but de cet exercice est de calculer la fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 qui vérifie le système formé des deux équations suivantes

$$\begin{cases} 2\partial_x f(x, y) + 3\partial_y f(x, y) = 4f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ f(x, x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{S})$$

1. Soit f solution de (S). On lui associe $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f(u + 2v, u + 3v) \text{ pour } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Montrer que l'application partielle $v \rightarrow h(v) = g(u, v)$ vérifie l'équation différentielle

$$h'(v) - 4h(v) = 0$$

(b) Calculer $h(0)$ et en déduire $h(v)$.

2. En déduire $f(x, y)$.

Exercice 2.

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ vérifiant

$$x\partial_x f(x, y) - y\partial_y f(x, y) = 0, \text{ pour tout } x \text{ et } y \text{ strictement positifs.} \quad (\text{E})$$

1. Soient u et v strictement positifs liés à x et y par strictement positifs par

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

et g associée à f par

$$f(x, y) = g(u, v)$$

Exprimer les dérivées partielles $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$ à l'aide des dérivées partielles $\partial_u g(u, v)$ et $\partial_v g(u, v)$ et de x et y .

2. En déduire la forme générale des solutions de (E).

Exercice 3.

1. Calculer l'intégrale

$$I_C = \int_C (x^2 + xy + y^2) dx dy$$

sur le carré $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

2. Représenter graphiquement le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2y \geq 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(L'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ est celle d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.)

Calculer l'intégrale

$$I_D = \int_D (x^2 + xy + y^2) dx dy$$

(On pourra utiliser la question 1 et l'intégrale de la même fonction sur le domaine $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2y \leq 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.)

3. Représenter graphiquement le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2y \leq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

et déduire des questions précédentes

$$I = \int_{\Omega} (x^2 + xy + y^2) dx dy$$

Exercice 4.

On considère le paramétrage de l'arc de courbe \mathcal{C} donné par

$$\theta \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} x(\theta) = e^{\theta} \cos \theta \\ y(\theta) = e^{\theta} \sin \theta \end{bmatrix}$$

1. Calculer $\mathbf{T}(\theta)$ le vecteur tangent unitaire à \mathcal{C} au point $(x(\theta), y(\theta))$ orienté dans la direction fixée par le paramétrage.
2. Calculer la courbure $\kappa(\theta)$ de \mathcal{C} au point $(x(\theta), y(\theta))$.
3. En déduire les coordonnées $(u(\theta), v(\theta))$ du centre de courbure de \mathcal{C} au point $(x(\theta), y(\theta))$.