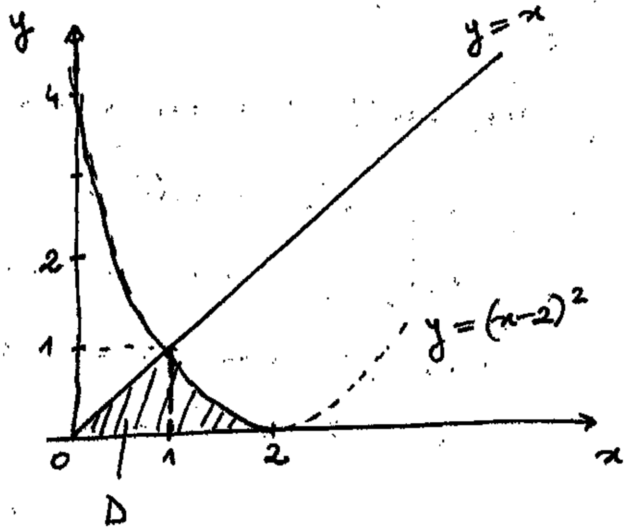
Correction Feuille de TD 3

Exercice 1

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 , x \leq 2 , y \leq x , y \leq (x-2)^2 \}$

$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\,dy$.



- pour $x \in [0,1]$: $x \leq (x-2)^2$
  $x \in [1,2]$: $(x-2)^2 \leq x$.

(on peut démontrer ceci rigoureusement en étudiant le signe de $(x-2)^2 - x = x^2 - 5x + 4$ exc. pour les étudiants)

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \min(x, (x-2)^2) , 0 \leq x \leq 2 \}$

$= D_1 \cup D_2$, avec $D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x , 0 \leq x \leq 1 \}$

$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq (x-2)^2 , 1 < x \leq 2 \}$

même avec égalité (dans ce cas, $\text{Aire}(D_1 \cap D_2) = 0$)

$D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \text{Aire}(D) = \text{Aire}(D_1) + \text{Aire}(D_2)$

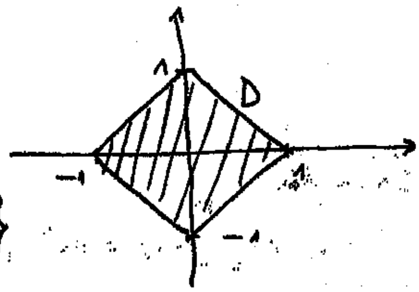
$$\text{Aire}(D_1) = \iint_{D_1} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \underbrace{\frac{1}{2}}$$

(on peut la calculer géométriquement aussi, l'aire du triangle)

$$\text{Aire}(D_2) = \iint_{D_2} dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{(x-2)^2} dy \right) dx = \int_1^2 (x-2)^2\,dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^2 = \underbrace{\frac{1}{3}}$$

$\hookrightarrow \text{Aire}(D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$

Exercice 2 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$



1) $f(x,y) = \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -(1-|x|) < y < 1-|x| \,,\, -1 < x < 1\}$

et aussi

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -(1-|y|) < x < 1-|y| \,,\, -1 < y < 1\}$.

Dans ce cas, cette deuxième variante est préférable, car $\forall\, y \in]-1,1[$, $x \longmapsto \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right)$ est impaire, donc, comme elle est aussi continue, elle est intégrable sur $]-(1-|y|), 1-|y|[$ et $\displaystyle\int_{-(1-|y|)}^{1-|y|} \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right) dx = \boxed{0}$ car l'intervalle est symétrique

• f continue sur $\overline{D}$ $\Rightarrow$ f intégrable sur $\overline{D}$

$\hookrightarrow \displaystyle\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-(1-|y|)}^{1-|y|} \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right) dx\right) dy = \boxed{0}$

Rmq. Très difficile à faire si on avait calculer en premier l'int. sur y.

2) $f(x,y) = y^2$.

Avec le même choix d'écriture pour D,

$\displaystyle\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-(1-|y|)}^{1-|y|} y^2\, dx\right) dy$

$\displaystyle = \int_{-1}^{1} 2y^2(1-|y|)\, dy = 2\int_0^1 y^2(1-y)\, dy = 2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 =$

$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$

car fct. paire (et intégrable) sur intervalle symétrique

Exercice 3

1) $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

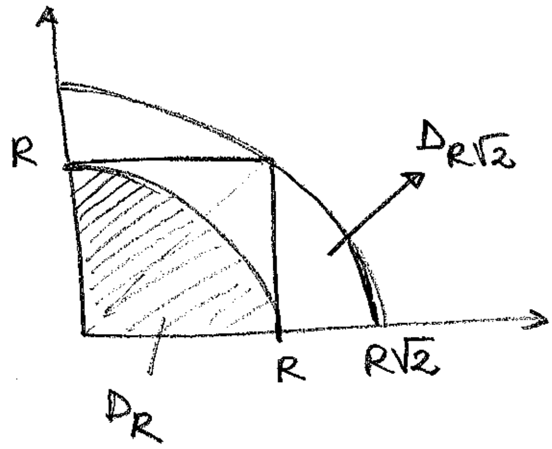
$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2} \cdot r \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = \boxed{\frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4}}$$

Chang. de coordonnées polaires :

$$\Psi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0,R], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

2) On a $D_R \subset K_R \subset D_{R\sqrt{2}}$

et $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$, $\forall x, y$



donc $$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_{K_R} (\dots) \leq \int_{D_{R\sqrt{2}}} (\dots).$$

3) $$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx\, dy$$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_0^R e^{-y^2} dy\right) = I_R^2,$$

où $I_R = \int_0^R e^{-t^2} dt$.

De l'inégalité de la question 2) + l'intégrale calculée en 1) :

$$\Rightarrow \frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4} \leq I_R^2 \leq \frac{\pi(1-e^{-2R^2})}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \leq I_R \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}} \quad (\text{car } I_R \geq 0)$$

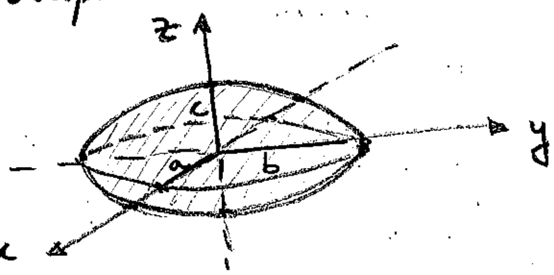
En faisant $R \to +\infty$ on obtient :

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \lim_{R\to\infty} I_R = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Exercice 4

1) $V = \mathrm{Vol}(D_1) = \int_{D_1} dx\,dy\,dz$, où $D_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}$

ellipsoïde



On fait le chang. de var.

$$\Psi : \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

Ψ est un chang. de variable de S sur D_1,

où $S = \{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \le 1 \}$

la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (dans le cas $a = b = c = 1$)

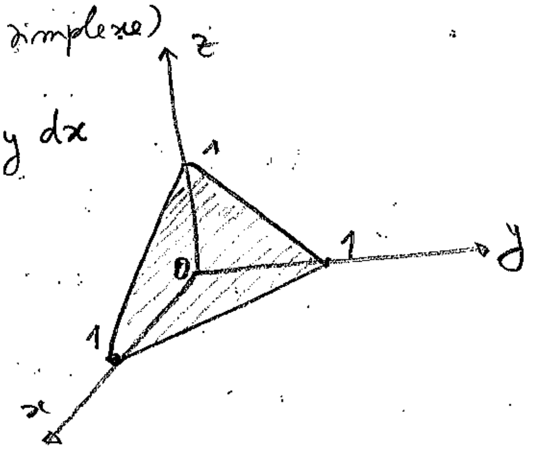
$$\det \Psi'(u,v,w) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc > 0 .$$

$$\Rightarrow V = \int_{D_1} dx\,dy\,dz = \int_S abc\,du\,dv\,dw = abc \cdot \mathrm{Volume}(S) = \boxed{\frac{4\pi}{3} \cdot abc}$$

[Le volume de la sphère de rayon R est $\frac{4\pi R^3}{3}$ (fait en cours)].

2) $D_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + z \le 1 \}$

tétraèdre (appelé simplexe)



$$\mathrm{Vol}(D_2) = \int_{D_2} dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} dz\,dy\,dx$$

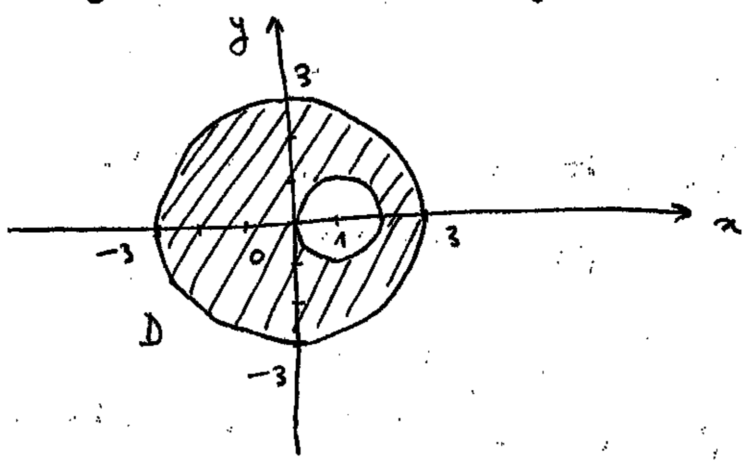
$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

(qu'on peut retrouver aussi avec la formule du vol. d'un tétraèdre)

Exercice 5 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-9<0 ,\ (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$



1) $\forall \begin{smallmatrix} x\in\mathbb{R} \\ y\in\mathbb{R}\end{smallmatrix}$, on a

$(x,y)\in D \iff (x,-y)\in D$

$\rightarrow$ L'axe des x est un axe de symétrie de D.

2) $$x_G = \frac{\int_D x\,dx\,dy}{\int_D dx\,dy}.$$

$\underbrace{D \cup C}_{\text{disjoints}} = \Omega$, où $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$
$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-9<0\}$

$$\rightarrow \int_D dx\,dy = \int_\Omega dx\,dy - \int_C dx\,dy = \text{Aire}(\Omega) - \text{Aire}(C)$$
$$= 9\pi - \pi = \boxed{8\pi}$$

$$\int_D x\,dx\,dy = \int_\Omega x\,dx\,dy - \int_C x\,dx\,dy.$$

$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < R^2\}$, avec $\underline{R=3}$

• <u>Chang. de coordonnées polaires</u> $\Psi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\int_\Omega x\,dx\,dy = \int_0^R\int_0^{2\pi} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^R r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)$$
$$= \frac{R^3}{3}\cdot\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi} = \boxed{0}$$

De même, avec le chang. de var. $\Psi : \begin{cases} x = u+1 \\ y = v \end{cases}$, $\det \Psi'(u,v) = 1$

$$\int_C x\,dx\,dy = \int_A (u+1)\cdot du\,dv, \quad A = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2\leq 1\}$$

$$= \int_A u\,du\,dv + \int_A du\,dv \overset{\text{comme pour } \Omega\ (R=1)}{=} 0 + \text{Aire}(A) = \pi$$

$\hookrightarrow \int_D x\,dx\,dy = -\pi \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_G}} = \dfrac{-\pi}{8\pi} = \boxed{-\dfrac{1}{8}}$

À cause de la symétrie de D par rapport à l'axe des x, $\boxed{y_G = 0}$.

En effet, si on note $D^+ = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$

$D^- = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < 0\}$,

alors $\int_D y\,dx\,dy = \int_{D^+} y\,dx\,dy + \int_{D^-} y\,dx\,dy$.

Mais $\int_{D^-} y\,dx\,dy = -\int_{D^-} (-y)\,dx\,dy = -\int_{D^+} v\,du\,dv$

avec le chang. de var.

$\Psi : \begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$, $|\det \Psi'(u,v)| = |-1| = 1$.

$\Psi(D^+) = D^-$

$\hookrightarrow \int_D y\,dx\,dy = 0 \Rightarrow y_G = 0$.

<u>Rmq</u>. On peut justifier de la même façon que $\int_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ à l'Exc. 2 1)

$f(x,y) = \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right)$ est impaire en x et le domaine D est symétrique par rapport à l'axe des y.