1 2

Correction TD 2r.

Exercice 1.

1. Soit $\lim x_n = a$ avec $x_n \in A_1$; $\lim f(x_n) = f(a) \leq b$ et donc $x \in A_1$; A_1 est fermé.

Supposons $a \in A_2$ et a n'est pas un point interne de A_2 $\forall n \geq 1$, $\exists x_n$ t.q $\|x_n - a\| \leq \frac{1}{n}$ et $x_n \notin A_2$, on a encore $f(x_n) \geq b$; $\lim x_n = a$ et donc

$\lim f(x_n) = f(a) < b$: contradiction

2. C est fermé car $(x,y) \longrightarrow x^2 - \sin y$ est continue.
C n'est pas compact car $(x=0, y=n) \in C$ et $(0,n)$ n'est pas borné.

D est ouvert car $(x,y) \longmapsto x^3 - 4e^y$ est continue.
D n'est pas compact car $D \neq \overline{D}$ (les points (x,y) t.q. $x^3 - 4e^y = 4 \in \overline{D}$ et $\notin D$)

E n'est ni ouvert ni fermé car les points (x,y) t.q $x^2 - 4z - 3y = 3 \in E$ et ne sont pas des points interne ; et les points (x,y) tels que $x^2 - 4z + 3y = 1 \in \overline{E}$ mais $\notin E$.

Exercice 2.

1. $x^2 + y^2 = 0$ ssi $(x,y) = (0,0)$. Les théorèmes généraux donnent $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$.

2. Il reste juste à vérifier la continuité en $(0,0)$.

On a : $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, d'où

$$|f(x,y)| \leq |x^2 - y^2|.$$

On a donc $\lim f(x,y) = 0$ si $\lim (x,y) = (0,0)$.

3. $$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

(On peut remarquer que $f(y,x) = -f(x,y)$ et écrire que $\partial_y f(x,y) = -\partial_x f(y,x)$).

On a $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$; d'où $\partial_x f(0,0) = 0$.
et de même $\partial_y f(0,0) = 0$. Par l'inégalité triangulaire on a

$$|\partial_x f(x,y)| \leq \frac{|y|(|x|^4 + |y|^4 + 4|x|^2|y|^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

En utilisant les majorations de $|x|$ et $|y|$ ci-dessus, on a

$|\partial_x f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et de même $|\partial_y f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0$.

f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

4. $\partial_{xy} f(x,y) = \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}$

$\partial_{yx} f(x,y) = \partial_{xy} f(x,y)$ (thms généraux !)

On peut montrer que f n'est pas de classe C^2 au voisinage de $(0,0)$ de deux façons différentes

Approche directe

$\partial_y \partial_x f(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\partial_x f(0,y) - \partial_x f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} -\dfrac{y^4}{y^4} = -1$

$\partial_x \partial_y f(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\partial_y f(x,0) - \partial_y f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4} = 1$

Comme $\partial_{xy} f(0,0) \neq \partial_{yx} f(0,0)$, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier

Approche indirecte :

$\partial_{xy} f(0,y) = \dfrac{-y^6}{y^6}$ pour $y \neq 0$ et donc $\lim \partial_{xy} f(0,y) = -1$

$\partial_{xy} f(x,0) = \dfrac{x^6}{x^6}$ pour $x \neq 0$ et donc $\lim \partial_{xy} f(x,0) = +1$

La fonction $(x,y) \to \partial_{xy} f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$; donc f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

1. Pour que f soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, il faut et il suffit que chaque application composante

$(r,\theta) \mapsto x = r\cos\theta$ et $(r,\theta) \mapsto y = r\sin\theta$ soit de classe C^1.

$f'(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ (Jacobienne)

$\det f'(r,\theta) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$ (déterminant jacobien)

2. Même argument pour le fait que g soit de classe C^1

$g'(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$

$\det g(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière ligne

$\det g'(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta$

Exercice 4

1. Si $(x,y) \neq (0,0)$ $x^2+y^2 > 0$ et donc

f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par les thms généraux

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$; $|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|$

et donc $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = f(0,0) = 0$, f continue sur $\mathbb{R}^2$

2. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par les thms généraux.

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

et de même $\partial_y f(0,0) = 0$.

$$f(x,y) - f(0,0) - x\partial_x f(0,0) - y\partial_y f(0,0) = xy\ln(x^2+y^2)$$

$$= \frac{xy\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}$$

Comme $\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$; on a bien

$$f(x,y) - f(0,0) - x\partial_x f(0,0) - y\partial_y f(0,0) = \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y)$$

avec $\lim_{(x,y)\to 0} \varepsilon(x,y) = 0$. Donc f est différentiable en $(0,0)$.

$$\partial_x f(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$|\partial_x f(x,y)| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\left|\ln\sqrt{x^2+y^2}\right| + 2\sqrt{x^2+y^2}$$

d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0$.

On a de même $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0$; f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

3. Equation du plan tangent au point $(1,1)$

$$z = f(1,1) + (x-1)\partial_x f(1,1) + (y-1)\partial_y f(1,1)$$

$f(1,1) = \ln 2$, $\partial_x f(1,1) = \partial_y f(1,1) = 1 + \ln 2$.

$$z = f(1,1) + (x+y-2)(1+\ln 2).$$

Exercice 5

1. φ est de classe C^1 car chaque composante est de classe C^∞.

2. φ est une bijection ssi le système

$$\begin{cases} u = x, \\ v + u^2 = y \end{cases}$$

possède une sol. et une seule $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sol : $u = x$ et $v = y - x^2$.

$$\varphi^{-1}(x,y) = (u = x,\ v = y - x^2).$$

3. On définit g par la relation

$$g(u,v) = f(x,y)$$

$$\partial_x f = \partial_u g\,\partial_x u + \partial_v g\,\partial_x v$$

$$\partial_y f = \partial_u g\,\partial_y u + \partial_v g\,\partial_y v$$

$\partial_x u = 1$, $\partial_x v = -2x$, $\partial_y u = 0$, $\partial_y v = 1$.

$\partial_x u = 1$, $\partial_x v = -2u$, $\partial_y u = 0$, $\partial_y v = 1$.

$$\partial_x f(x,y) = \partial_u g(u,v) - 2u\,\partial_v g(u,v)$$

$$\partial_y f(x,y) = \partial_v g(u,v)$$

$$\partial_x f(x,y) + 2x\,\partial_y f(x,y) = \partial_u g(u,v) - 2u\,\partial_v g(u,v) + 2u\,\partial_v g(u,v) = 0$$

4. $\partial_u g(u,v) = 0$ donne $g(u,v) = h(v)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$f(x,y) = h(y - x^2).$$

Exercice 6. 1. U ouvert et donc non compact

2. $u = x+y$, $v = x-y$, $g(u,v) = f(x,y)$

$\partial_x f = \partial_u g\, \partial_x u + \partial_v g\, \partial_x v$, $\partial_y f = \partial_u g\, \partial_y u + \partial_v g\, \partial_y v$.

$\partial_x u = 1$, $\partial_x v = 1$, $\partial_x v = 1$, $\partial_y v = -1$.

$\partial_x f = \partial_u g + \partial_v g$, $\partial_y f = \partial_u g - \partial_v g$

$\partial_x^2 f = \partial_u(\partial_u g + \partial_v g) + \partial_v(\partial_u g + \partial_v g) = \partial_u^2 g + 2\partial_{uv} g + \partial_v^2 g$

$\partial_y^2 f = \partial_u(\partial_u g - \partial_v g) - \partial_v(\partial_u g - \partial_v g) = \partial_u^2 g - 2\partial_{uv} g + \partial_v^2 g$

$\partial_x^2 f - \partial_y^2 f = 4\partial_{uv} g = \dfrac{1}{\sqrt{uv}}$ pour $uv > 0$.

3. On observe alors que $\partial_{uv}\sqrt{uv} = 1/4\sqrt{uv}$ si $uv > 0$; d'où

$\partial_{uv}\left(g(u,v) - \sqrt{uv}\right) = 0$; $g(u,v) = \sqrt{uv} + p(u) + q(v)$

p, q deux fonctions qcq de classe C^1.

$$f(x,y) = p(x+y) + q(x-y) + \sqrt{x^2-y^2}$$

Exercice 7

1. $x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_N)$ admet un extremum au point $x_i = a_i$; donc $\partial_{x_i} f(a) = 0$

2. $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{N} (x_i - a_i)\, \partial_{x_i} f(a) + \frac{1}{2}(x-a)^T Hf(a)(x-a)$
$+ \|x-a\|^2 \varepsilon(a,x)$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(a,x) = 0$

Si a est un point critique de f ; on a

$$2(f(x) - f(a)) = (x-a)^T Hf(a)(x-a) + 2\|x-a\|^2 \varepsilon(x,a)$$

Comme $Hf(a)$ est symétrique, il existe P orthogonale telle que $Hf(a) = P^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) P$

où $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_N$ sont les valeurs propres de $Hf(a)$. Si $Hf(a)$ est déf. pos. alors $\lambda_1 > 0$

D'où $2(f(x) - f(a)) = (P(x-a))^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) P(x-a) + 2\|x-a\|^2 \varepsilon(a,x)$

Notons $P(x-a) = v$; $v^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) v = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_N v_N^2$

et donc $(x-a)^T Hf(a)(x-a) \ge \lambda_1(v_1^2 + \dots + v_N^2) = \lambda_1 \|x-a\|^2$

Ce qu'on écrit encore : $2(f(x) - f(a)) \ge (\lambda_1 + 2\varepsilon(a,x))\|x-a\|^2$

On voit donc que pour $\|x-a\|$ suffisamment petit

$$2(f(x) - f(a)) \ge \frac{\lambda_1}{2}\|x-a\|^2 > 0$$

Le point a est donc un minimum local. On a de même si $Hf(a)$ est déf. négative, a est un max local.

3. (a) $\partial_x f(x,y) = 2x + y - 3 = 0$, $\partial_y f(x,y) = x + 2y - 6 = 0$

D'où $3(x+y) = 9$ et donc $x + y = 3$; d'où $x = 0$ et $y = 3$.

f admet un seul point critique : $(0,3)$;

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $p(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda)$; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

$Hf(0,3)$ déf. pos. : point critique est un minimum local.

(b) $f(x,y) = f(0,3) + \frac{1}{2}\left([x \;\; y-3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-3 \end{bmatrix}\right)$; exacte vu que les dérivées d'ordre 3 sont nulles ; $f(x,y) = -9 + (x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 9)$

(c) $f(x,y) = -9 + \frac{1}{2}[x \;\; y-3]\, Hf(0,3) \begin{bmatrix} x \\ y-3 \end{bmatrix}$; d'où

$$f(x,y) + 9 \ge 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$