Correction feuille de TD 1

IC2, 2011-2012

Exercice 1

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \ ; \ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{bmatrix}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 = \boxed{-8}.$$

- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ \boxed{x+1 \quad x+1 \quad x+1} & & \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} =$

$$= (x+1) \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} \underset{\begin{bmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{bmatrix}}{=} (x+1) \cdot \begin{vmatrix} x+2 & x+1 & 2x+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3x+5 & 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} x+1 & 2x+2 \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} = -(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^2 \left(7x+12 - 2(2x+3)\right) = -(x+1)^2 (3x+6)$$

$$= \boxed{-3(x+1)^2(x+2)}.$$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{bmatrix}}{=} (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)^2 = \underline{(1-\lambda)(1+\lambda)^2} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1}.$$

$\Rightarrow \underset{\text{(spectre)}}{Sp(A)} = \{$les valeurs propres de $A\} = \{-1, 1\}$

2) A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ • P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ (OK)
• $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$, $\forall \lambda$ valeur propre de A

l'espace propre associé à λ

la multiplicité de λ comme racine de P_A

• On a toujours $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$,
donc pour $\lambda = 1$, on a $m_1 = 1$, donc $\dim E_1 = 1 = m_1$.
OK

• Il reste à vérifier que $\underline{\dim E_{-1} = 2}$ (car $m_{-1} = 2$).

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) = \{ v \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda I_3) v = 0_{\mathbb{R}^3} \}.$$

$$E_{-1} = \{ v \in \mathbb{R}^3 : (A + I_3) v = 0_{\mathbb{R}^3} \}.$$

$v = (x, y, z)^T$

$$(A + I_3) v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0.$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \{ (x, y, x+y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Vect}\Big(\underset{\boxed{v}}{(1,0,1)}, \underset{\boxed{w}}{(0,1,1)} \Big)$$

$\Rightarrow \dim E_{-1} = 2 = m_1$ pas colin. $\Rightarrow$ libre

$\hookrightarrow$ $\underline{A \text{ est diagonalisable}}$.

3) On sait que $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3$.

• On a déjà trouvé une base $\{v, w\}$ dans E_{-1}.

• $E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)$

$v = (x, y, z)^T$; $(A - I_3) v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = y = z \Rightarrow E_1 = \operatorname{Vect}\Big(\underset{\boxed{u}}{(1,1,1)} \Big)$$

$\{u\}$ est une base de E_1 $\Rightarrow$ $\underline{\mathcal{B} = \{u, v, w\}}$ $\underline{\text{base de } \mathbb{R}^3 \text{ formée de vecteurs propres de } A}$.

La matrice semblable à A dans cette base :

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Au & Av & Aw \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}$$ car $\begin{cases} Au = u \\ Av = -v \\ Aw = -w \end{cases}$

La relation entre A et Δ :

$$\Delta = P^{-1} A P,$$

avec
$$P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$
la matrice de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\mathcal{B} = \{u, v, w\}$

(exc. à vérifier cette relation)

Exercise 3 $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.

1) • $f(a(x_1, x_2) + b(x_1', x_2') ; (y_1, y_2)) = f((a x_1 + b x_1', a x_2 + b x_2'), (y_1, y_2))$

$$\overset{\text{déf}}{=} (a x_1 + b x_1') y_1 - (a x_2 + b x_2') y_1 + 2(a x_2 + b x_2') y_2$$

$$= a(x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2) + b(x_1' y_1 - x_2' y_1 + 2x_2' y_2)$$

$$= a\, f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + b\, f((x_1', x_2'), (y_1, y_2)).$$

↳ f est linéaire par rapport à la première variable.

• on vérifie de la même façon que f est linéaire par rapport à la 2ème variable aussi, i.e.

$$f((x_1, x_2) ; a(y_1, y_2) + b(y_1', y_2')) = a\, f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + b\, f((x_1, x_2), (y_1', y_2')).$$

↳ f est une forme bilinéaire de $\mathbb{R}^2$.

Une autre façon de montrer la bilinéarité et en même temps de trouver la matrice A :

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2(-y_1+2y_2) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1+2y_2 \end{pmatrix} =$$
$$= (x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{= A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(x,y) = x^T A y$,

et c'est facile de vérifier aussi la bilinéarité : fait en cours

$$\begin{aligned} f(ax+bx',y) &= (ax+bx')^T A y \\ &= a\,x^T A y + b(x')^T A y \\ &= a f(x,y) + b f(x',y). \end{aligned}$$

pareil pour $f(x, ay+by')$ ...

2) $A = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$f(e_i,e_j)$ est le coeff. de $x_i y_j$.

3) $B = \mathrm{Mat}(f, \{u_1,u_2\}) = \begin{pmatrix} f(u_1,u_1) & f(u_1,u_2) \\ f(u_2,u_1) & f(u_2,u_2) \end{pmatrix}$ par définition

$$f(u_1,u_1) = f((1,0),(1,0)) = f(e_1,e_1) = 1$$
$$f(u_1,u_2) = f(e_1, e_1+e_2) = f(e_1,e_1) + f(e_1,e_2) = 1 + 0 = 1$$
$$f(u_2,u_1) = f(e_1+e_2, e_1) = f(e_1,e_1) + f(e_2,e_1) = 1 + (-1) = 0$$
$$f(u_2,u_2) = f(e_1+e_2, e_1+e_2) = f(e_1,e_1) + f(e_1,e_2) + f(e_2,e_1) +$$
$$+ f(e_2,e_2) = 1 + 0 + (-1) + 2 = 2$$

[on pourrait aussi faire le calcul direct, en utilisant la définition de f] $\longrightarrow$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$X^T B Y = X_1Y_1 + X_1Y_2 + 2X_2Y_2$.

- Si $v = X_1u_1 + X_2u_2$ et $w = Y_1u_1 + Y_2u_2$, alors $f(v,w)$ $=$ $X^T B Y$

4) On a $B = P^T A P$,

où $P = P_{\{e_i\},\{u_i\}} = \mathrm{Mat}(id ; \{u_i\},\{e_i\}) = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \end{matrix}\right) \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$

$u_1 = e_1$

$u_2 = e_1 + e_2$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P^T A P = B$ effectivement.

Exercice 4 $\quad q(v) = x^2 - 2yz + xz.$

1) • vérifier que $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$

$$q(\lambda v) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda y)(\lambda z) + (\lambda x)(\lambda z) = \lambda^2 q(v) \quad (\text{OK})$$

• montrer que $f : f(u,v) = \frac{1}{4}\left[q(u+v) - q(u-v)\right]$ est une forme bilinéaire.

$u = (x, y, z)$, $\quad v = (x', y', z')$

$$\begin{aligned} q(u+v) &= (x+x')^2 - 2(y+y')(z+z') + (x+x')(z+z') \\ &= x^2 + (x')^2 + 2xx' - 2yz - 2yz' - 2y'z - 2y'z' \\ &\quad + xz + xz' + x'z + x'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(u-v) &= (x-x')^2 - 2(y-y')(z-z') + (x-x')(z-z') \\ &= x^2 + (x')^2 - 2xx' - 2yz + 2yz' + 2y'z - 2y'z' \\ &\quad + xz - xz' - x'z + x'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(u,v) &= \frac{1}{4}\left(4xx' - 4yz' - 4y'z + 2xz' + 2x'z\right) \\ &= xx' - yz' - y'z + \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2}x'z. \\ &= x\left(x' + \frac{1}{2}z'\right) + y(-z') + z\left(-y' + \frac{1}{2}x'\right) \\ &= u^T \cdot \begin{pmatrix} x' + \frac{1}{2}z' \\ -z' \\ \frac{1}{2}x' - y' \end{pmatrix} = u^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot v \end{aligned}$$

$f(u,v) = u^T A v$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\to$ f forme bilinéaire $\hookrightarrow$ q forme quadratique.
f est la forme polaire associée à q.

On remarque que • $q(v) = f(v,v) = v^T A v$.
• f peut s'obtenir à partir de q par dédoublement : $x^2 \to x x'$

$yz \to \frac{1}{2} y'z + \frac{1}{2} y z'$

$xz \to \frac{1}{2} x'z + \frac{1}{2} x z'$

2) $A = \left(f(e_i, e_j)\right)_{1 \le i,j \le 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 - 4e_3$, $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} e_1 + e_3$. $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

a) $B = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \left(f(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\right)_{1 \le i,j \le 3}$

calcul direct :

$f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = f(e_1, e_1) = 1$

$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f(e_1, 2e_1 + e_2 - 4e_3) = 2f(e_1, e_1) + f(e_1, e_2) - 4 f(e_1, e_3) = 2 + 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$f(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = f(e_1, -\frac{1}{2} e_1 + e_3) = -\frac{1}{2} f(e_1, e_1) + f(e_1, e_3) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

...

ou avec la formule de changement de base :

$B = P^T A P$, avec $P = P_{(e_i),(\varepsilon_i)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Si $v = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$, alors

$$q(v) = (a, b, c)\, B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + 4b^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

b)

- q définie $\Leftrightarrow [\, q(v) = 0 \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^3} \,]$

  Pour $a = 0$, $b = 1$, $c = 4$ $(v = \varepsilon_2 + 4\varepsilon_3)$

  on a $q(v) = 0$, alors que $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

  $\Rightarrow$ <u>q n'est pas définie</u>.

- q positive $\Leftrightarrow$ $q(v) \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$.

  On remarque que $q(\varepsilon_3) = f(\varepsilon_3, \varepsilon_3) = -\frac{1}{4} < 0$.

  $\hookrightarrow$ <u>q n'est pas positive</u>.

[$\hookrightarrow$ f n'est pas un produit scalaire
(f n'est ni définie, ni positive).

$\boxed{\text{Exercice 5}}$ $q_a(x, y, z) = (2a+1)x^2 + 2ay^2 + (2a+1)z^2 - 2xz$.

1) $\boxed{a=0}$ $\Rightarrow q_0(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2xz = (x-z)^2 \geq 0$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ q_0 est positive $\Rightarrow$ f_0 est positive aussi
$[\, f_0(v, v) \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^3 \,]$

Par contre, f_0 <u>n'est pas définie</u>, car

on peut trouver $e_2 = (0, 1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ t.q. $f(e_2, e_2) = 0$.

$\hookrightarrow$ f_0 n'est pas un produit scalaire.

2) $\boxed{a=1}$: $q_1(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz =$
$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + (x-z)^2 \geq 0$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ q_1 est positive $\Rightarrow$ f_1 est positive

- $q_1(v) = 0$, $v=(x,y,z)$ $\Rightarrow$ $x=y=z=0$ $\Rightarrow$ $v = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow$ q_1 est définie $\Rightarrow$ f_1 est définie

↳ f_1 est un produit scalaire (forme bilin. positive et définie)

3) Espace euclidien = espace vectoriel réel de dim. finie muni d'un produit scalaire

$q_a(x,y,z) = 2a(x^2+y^2+z^2) + (x-z)^2$.

$\Rightarrow$ • si $\boxed{a>0}$: • $q_a(x,y,z) \geq 0$, $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ q_a est positive $\Rightarrow$ f_a positive

• si $q_a(x,y,z)=0 \Rightarrow x=y=z=0 \Rightarrow q_a$ définie

$\Rightarrow$ f_a définie

↳ f_a est un produit scalaire

↳ $(\mathbb{R}^3, f_a)$ espace euclidien

- si $\boxed{a=0}$: on a vu que q_0 (f_0) n'est pas définie

$\Rightarrow$ f_0 n'est pas un produit scalaire

↳ $(\mathbb{R}^3, f_0)$ n'est pas un espace euclidien.

- si $\boxed{a<0}$: pour $x=z=0$ (par exemple e_2)
$y \neq 0$

$q_a(e_2) = 2a < 0$ $\Rightarrow$ q_a (f_a) n'est pas positive

$\Rightarrow$ f_a n'est pas un produit scalaire

↳ $(\mathbb{R}^3, f_a)$ n'est pas un espace euclidien.

Exercice 6

1) $u_1 = (1, 0, 0, -1)$, $u_2 = (-1, -1, 1, 1)$

$E = \text{Vect}(u_1, u_2)$

u_1, u_2 ne sont pas colinéaires $\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ libre $\Rightarrow$ base de E

$\langle u_1, u_2 \rangle = -1 + (-1) = -2 \Rightarrow u_1$ et u_2 ne sont pas orthogonaux

On applique le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 + \alpha v_1 \end{cases}, \text{ avec } \alpha \text{ t.q. } \langle v_1, v_2 \rangle = 0 .$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 + \alpha v_1 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle + \alpha \langle u_1, u_1 \rangle \underline{= 0}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\| u_1 \|^2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = u_1 = (1, 0, 0, -1) \\ v_2 = u_1 + u_2 = (0, -1, 1, 0) . \end{cases}$$

[On vérifie que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$]

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ est une base <u>orthogonale</u> de E .

$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$ va être une base <u>orthonormée</u> de E

$\|v_1\| = \sqrt{2}$, $\|v_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow v_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 0, -1)$

$v_2' = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, -1, 1, 0)$

$\{v_1', v_2'\}$ base <u>orthonormée</u> de E

$\left(\|v_1'\| = 1, \ \|v_2'\| = 1, \ \langle v_1', v_2' \rangle = 0 \right)$

2) $E^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^4 : \langle v, u_1 \rangle = 0, \langle v, u_2 \rangle = 0 \}$.

$$v = (x, y, z, t) : \begin{cases} \langle v, u_1 \rangle = 0 \\ \langle v, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ -x - y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ z = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^\perp = \{ (x, y, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}\{ \underbrace{(1, 0, 0, 1)}_{= w_1}, \underbrace{(0, 1, 1, 0)}_{= w_2} \}$$

$\{w_1, w_2\}$ base de $E^\perp$ (car libre et génératrice)

On remarque que $\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \Rightarrow \{w_1, w_2\}$ base orthogonale.

On normalise les vecteurs :

$$\left\{\begin{array}{l} w_1' = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0,1) \\[2ex] w_2' = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1,0) \end{array}\right. \Rightarrow \{w_1', w_2'\} \text{ base orthonormée de } E^{\perp}.$$

3) $\mathbb{R}^4 = E \oplus E^{\perp}$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ est $\{v_1', v_2', w_1', w_2'\} = \mathcal{B}$.

[tout système orthogonal ne contenant pas 0 est libre ;
+ le cardinal de la famille $= 4 = \dim \mathbb{R}^4$]

4) $\forall z \in \mathbb{R}^4, \exists!\ x \in E, y \in E^{\perp}$ t.q. $z = x + y$.

$p_E(z) = x$.

Dans la base $\{v_1, v_2, w_1, w_2\} = \boxed{\mathcal{V}}$ de $\mathbb{R}^4$, la matrice de p_E est

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_E(v_1) & p_E(v_2) & p_E(w_1) & p_E(w_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{array}$$

, car
$p_E(v_1) = v_1$, $(v_1 \in E)$
$p_E(v_2) = v_2$, $(v_2 \in E)$
$p_E(w_1) = 0$, $(w_1 \in E^{\perp})$
$p_E(w_2) = 0$, $(w_2 \in E^{\perp})$

La formule de changement de base :

$$A' = \mathrm{Mat}(p_E, (e_i)) = P^{-1} A P,$$

avec $P = P_{\mathcal{V},(e_i)}$ la matrice de passage entre $\mathcal{V}$ et (e_i)

On a
$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = e_1 - e_4 \\ v_2 = -e_2 + e_3 \\ w_1 = e_1 + e_4 \\ w_2 = e_2 + e_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} w_1 \\ e_2 = -\frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} w_2 \\ e_3 = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} w_2 \\ e_4 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} w_1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1/2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} ; \quad P^{-1} = P_{(e_i), \mathcal{V}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

$\Rightarrow A' = \mathrm{Mat}\left(p_E, (e_i)\right) = P^{-1} A P =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

• <u>Une autre solution</u>, <u>plus directe</u> :

On a $\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} w_1 \\ e_2 = -\frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} w_2 \\ e_3 = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} w_2 \\ e_4 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} w_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_E(e_1) = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_4) \\ p_E(e_2) = -\frac{1}{2} v_2 = -\frac{1}{2}(-e_2 + e_3) \\ \qquad = \frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_3 \\ p_E(e_3) = \frac{1}{2} v_2 = -\frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \\ p_E(e_4) = -\frac{1}{2} v_1 = -\frac{1}{2}(e_1 - e_4) \\ \qquad = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_4 \end{array} \right.$

d'où $\mathrm{Mat}\left(p_E, (e_i)\right) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} p_E(e_1) & p_E(e_2) & p_E(e_3) & p_E(e_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$

[Peut-être c'est mieux de leur montrer cette solution et leur laisser comme exo de vérifier avec la formule de chang. de base.]

5) $v = (1, 2, -1, -2) = e_1 + 2e_2 - e_3 - 2e_4$.

On a
$$e_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_1'$$
$$e_2 = -\frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_2' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_2'$$
$$e_3 = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_2' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_2'$$
$$e_4 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_1'$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{2}}{2} v_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_1' + (-\sqrt{2}) v_2' + \sqrt{2} w_2'$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{2} v_2' - \frac{\sqrt{2}}{2} w_2' + \sqrt{2} v_1' - \sqrt{2} w_1'$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} v_1' - \frac{3\sqrt{2}}{2} v_2' - \frac{\sqrt{2}}{2} w_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_2'.$$

$\Rightarrow$ Les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B} = \{v_1', v_2', w_1', w_2'\}$ sont $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Avec la <u>formule de changement de base</u> :

$$\underbrace{X'}_{\text{les coord. dans } \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},(e_i)} \underbrace{X}_{\text{les coordon. dans } (e_i)}$$

$$P_{\mathcal{B},(e_i)} = \sqrt{2} \cdot P_{v,(e_i)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow X' = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

6) $$v = \underbrace{\frac{3\sqrt{2}}{2} v_1' - \frac{3\sqrt{2}}{2} v_2'}_{\substack{\cap \\ E}} \underbrace{- \frac{\sqrt{2}}{2} w_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_2'}_{\substack{\cap \\ E^\perp}} = u_1 + u_2,$$

où

$$u_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} v_1' - \frac{3\sqrt{2}}{2} v_2' = \frac{3}{2}(1,0,0,-1) - \frac{3}{2}(0,-1,1,0)$$
$$= \frac{3}{2}(1,1,-1,-1) \in E$$

$$u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} w_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} w_2' = -\frac{1}{2}(1,0,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1,0)$$
$$= \frac{1}{2}(-1,1,1,-1) \in E^\perp .$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \overset{\text{Thm. Pythagore}}{\Longrightarrow} \|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 . \ (*)$$

Dans notre cas : $\|u_1 + u_2\|^2 = \|v\|^2 = 1 + 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 10.$

$$\|u_1\|^2 = \frac{9}{4}(1+1+1+1) = 9$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1$$

↳ On a bien $(*)$ vérifiée.

$\boxed{\text{Exercice 7}}$

$u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $P_u = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T$.

1) $P_u^T = I_n^T - \frac{1}{\|U\|^2} (UU^T)^T = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T = P_u$

↳ P_u symétrique.

2) $D = \text{Vect}(u)$.

a) Soit $v \in D \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \lambda u$.

La matrice colonne de v dans $\mathcal{B}$ (la base canonique) est $V = \lambda U$.

La matrice colonne de $p_u(v)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u V = \lambda P_u U = \lambda \left(U - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T U \right) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

car $U^T U = \langle U, U \rangle = \|U\|^2$.

Donc $p_u(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

b) Soit $w \in D^\perp$ et W sa matrice colonne dans $\mathcal{B}$.

La matrice de $p_u(w)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u W = W - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T W = W,$$

car $U^T W = \langle U, W \rangle = 0$. $\begin{pmatrix} u \in D \\ w \in D^\perp \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_u(w) = w$.

c) p_u est la projection orthogonale sur $D^\perp$.

$\boxed{\text{Exercice 8}}$ $A_a = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2a & 6 & -3 \\ -6a & 3 & 2 \\ 3a & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1) A_a orthogonale $\Leftrightarrow$ ses colonnes forment une base orthonormée ($\langle C_i, C_j \rangle = 0, \forall i \neq j$ et $\|C_i\| = 1, \forall i$)

Dans notre cas on a $\begin{cases} \langle C_i, C_j \rangle = 0, & \forall i \neq j \in \{1,2,3\} \\ \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \end{cases}$

Il reste à avoir $\|C_1\| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}\sqrt{4a^2 + (-6a)^2 + 9a^2} = 1$

$\Leftrightarrow \underline{a^2 = 1} \Leftrightarrow \underline{a \in \{-1, 1\}}$.

2) $\boxed{a = 1}$

A_1 est la matrice d'une rotation $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ orthogonale} \\ \det(A) = 1 \end{cases}$

$A_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $\det(A_1) = \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

$\begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} \boxed{2} & 6 & -3 \\ \boxed{0} & 21 & -7 \\ \boxed{0} & -7 & \frac{21}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 21 & -7 \\ -7 & \frac{21}{2} \end{vmatrix}$

$= \boxed{1}$

$\hookrightarrow$ A_1 est la matrice d'une rotation.

- A_1 matrice d'une rotation autour d'un axe
  - $\Leftrightarrow$ A_1 admet 1 comme valeur propre
  - $\Leftrightarrow$ $\exists\ v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ t.q. $Av = v$

$A_1 v = v \Leftrightarrow (A_1 - I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 \\ -6x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$

$v = (x, y, z)^T$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 & (L_1) \\ 14x \qquad\qquad = 0 & (3L_2 - L_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$; On prend, par exemple, $\underline{v = (0, 1, 2)}$.

$\Rightarrow$ A_1 est la matrice de la rotation autour de l'axe $\underline{\Delta = \mathrm{Vect}(0, 1, 2)}$.

⚠ $\exists$ une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de la même rotation est $A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On veut trouver l'angle θ.

⚠ La trace d'une matrice est invariante par chang. de base

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A_1) \Leftrightarrow 1 + 2\cos\theta = \frac{11}{7} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{7}$.

$\Rightarrow \underbrace{\theta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$ ou $\underbrace{2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$.

- Pour décider, on doit trouver le signe de $\sin\theta$.

⚠ Le signe de $\sin\theta$ est le même que le signe du produit mixte $[u, A_1 u, v]$, avec $u \in \Delta^\perp$.

Soit $u = (1, 0, 0)^T \in \Delta^\perp$. On a $A_1 u = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'où $[u, A_1 u, v] = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \frac{2}{7} & 0 \\ \boxed{0} & -\frac{6}{7} & 1 \\ \boxed{0} & \frac{3}{7} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{6}{7} & 1 \\ \frac{3}{7} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(-12 - 3)$

$= -\frac{15}{7}\ \boxed{< 0}$!

$\Rightarrow \sin\theta < 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$.

Donc A_1 est la matrice de la rotation autour de l'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(0,1,2)$ d'angle $\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$

$\boxed{\text{Exercice 9}}$ $q(x,y,z) = 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy + 4yz$.

1) La matrice de q dans $\mathcal{E}$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.
On va trouver une base orthonormée directe formée de vecteurs propres de A.

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

- $E_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I_3)$: $v = (x,y,z)$; $(A - 3I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ -x + 2z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow E_3 = \{(2z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,\underbrace{(2,-2,1)}_{\boxed{v_1}}.$$

$\|v_1\| = \sqrt{9} = 3$
Soit $b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.

- $E_6 = \mathrm{Ker}(A - 6I_3)$; $v = (x,y,z)$, $(A - 6I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow E_6 = \{(2y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,\underbrace{(2,1,-2)}_{\boxed{v_2}}$$

$\|v_2\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{3}(2,1,-2)$.

- $E_9 = \mathrm{Ker}(A - 9I_3)$: $v = (x,y,z)$, $(A - 9I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff$

$$\iff \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \{ y = z = 2x \Rightarrow E_9 = \{(x, 2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,\underbrace{(1,2,2)}_{\boxed{v_3}}$$

$\|v_3\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$.

$\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3)$ est une base <u>orthonormé</u>. (on vérifie bien que $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, pour $i \neq j$)

Rmq. : On peut démontrer en général que, si A matrice symétrique, alors
- A diagonalisable
- les espaces propres sont orthogonaux 2 à 2
- il existe une base orthonormée formée de vect. propres

- Vérifier si B est une base directe :

$$P = P_{\mathcal{E}B} = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1' & v_2' & v_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

(la matrice de passage entre $\mathcal{E}$ et B)

$$\det(P_{\mathcal{E}B}) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{[C_2 \leftarrow C_2 - C_1\ ;\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3]}{=} \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\cdot\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$= 1 \Rightarrow B$ est une <u>base directe</u>.

- La matrice semblable à A dans la base B est :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$ On a $D = P^{-1}AP$.

P est la matrice de passage entre deux bases <u>orthonormés</u>
$\Rightarrow$ P est <u>orthogonale</u>.
(car les colonnes de P sont 2 à 2 orthogonaux (base orthonormée) et de norme 1)

On a donc $P^{-1} = P^T \Rightarrow D = P^TAP$.
On reconnait la formule de chang. de base pour les formes quadratiques
$\Rightarrow$ D est la matrice de q dans la base B
$\Rightarrow$ si $v = X b_1 + Y b_2 + Z b_3$, alors $q(v) = 3X^2 + 6Y^2 + 9Z^2$.

2) P est orthogonale et $\det(P) = 1 \Rightarrow$ la transf. géométrique associée à P est une <u>rotation</u>.