STPI-IC2 Correction CC 2 2013-14

UF. Mathe-Meca UV - Mathématiques

Exercice 1

1. $h(r,\theta) = f(x,y)$; $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\partial_r h(r,\theta) = \partial_x f(x,y)\partial_r x + \partial_y f(x,y)\partial_r y$

$= \cos\theta\, \partial_x f(x,y) + \sin\theta\, \partial_y f(x,y)$

$r\partial_r h(r,\theta) = r\cos\theta\, \partial_x f(x,y) + r\sin\theta\, \partial_y f(x,y)$

$= x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y)$

2. $x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = r\partial_r h(r,\theta) = 2(x^2+y^2) = 2r^2$

Comme $y>0$, on a $r>0$ et donc $\partial_r h = 2r$

3. $\partial_r h = 2r = \partial_r r^2$, d'où $\partial_r(h - r^2) = 0$

$h(r,\theta) - r^2 = u(\theta)$, u fonction arbitraire de classe C^1 ; d'où $h(r,\theta) = r^2 + u(\theta)$

4. On a $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+y^2}$; $\sin\theta = y/\sqrt{x^2+y^2}$

Comme $y>0$, $\sin\theta>0$ et donc $0<\theta<\pi$; il vient donc $\theta = \arccos\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Les solutions de (E) sont donc données par

$f(x,y) = x^2+y^2 + u\left(\arccos\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$

Exercice 2. Soit $g(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. Points critiques de g

$$\begin{cases} \partial_x g(x,y) = 6x^2 + 6y = 0 \\ \partial_y g(x,y) = 6x - 6y = 0 \end{cases}$$

On a donc $x = y$ et $x^2 + x = x(x+1) = 0$

D'où l'ensemble des points critiques $\{(0,0), (-1,-1)\}$.

2. Extremums

$$H g(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 g(x,y) & \partial_x\partial_y g(x,y) \\ \partial_x\partial_y g(x,y) & \partial_y^2 g(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$A_0 = Hg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$ $A_{-1} = Hg(-1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$

$p_0(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I_2) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 6 \\ 6 & -6-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda - 36$

Racines de $p_0(\lambda)$: $\lambda_{10}, \lambda_{20}$ vérifient $\lambda_{10}\lambda_{20} = -36 < 0$

$(0,0)$ n'est pas un extremum (point-selle)

$p_1(\lambda) = \det(A_{-1} - \lambda I_2) = \det\begin{bmatrix} -12-\lambda & 6 \\ 6 & -6-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 18\lambda + 36$

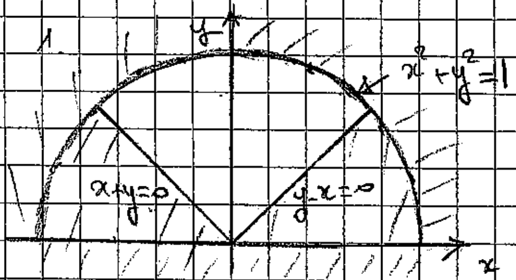
Racines de $p_{-1}(\lambda)$: $\lambda_{1,-1}$, $\lambda_{2,-1}$; $\lambda_{1,-1}\lambda_{2,-1} = 36$, $\lambda_{1,-1}+\lambda_{2,-1} = -18$.

$\lambda_{1,-1} < \lambda_{2,-1} < 0$ et donc g a un maximum local en $(-1,-1)$.

3. $\lim_{x \to \pm\infty} g(x,y) = \pm\infty$; g n'admet ni maximum ni minimum global.

Exercice 3

1.



$x^2+y^2<1$ est l'intérieur du disque

le point $(x=0, y=1)$ permet de déterminer les ensembles $\{x+y>0\}$ et $\{y-x>0\}$

$(x,y) \in D$ ssi $x^2+y^2<1$, $x+y>0$ et $y-x>0$

et donc $(-x)^2+y^2<1$, $y-(-x)>0$, $(-x)+y>0$.

ou encore $(-x,y) \in D$; l'axe des y est un axe de symétrie de D.

2. D est un quart de cercle de rayon 1 ; aire $D = \pi/4$

3. $I_1 = 0$ car la fonction à intégrer $(x,y) \mapsto x$ est impaire en x. Pour calculer I_2 on passe en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

élément d'aire $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$I_2 = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} r^2 \sin\theta \, d\theta\, dr = \left(\int_{r=0}^{1} r^2 dr\right)\left(\int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta\, d\theta\right)$$

$$I_2 = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \left[-\cos\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{1}{3}\, 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 4

1. $\underline{T}(t) = \underline{r}'(t)/\|\underline{r}'(t)\|$ est défini si $\|\underline{r}'(t)\| > 0$

$\underline{r}'(t) = (3-3t^2, 6t) = 3(1-t^2, 2t)$

$\|\underline{r}'(t)\| = 3\,\|(1-t^2, 2t)\| = 3\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2} =$

$\|\underline{r}'(t)\| = 3\sqrt{1-2t^2+t^4+4t^2} = 3\sqrt{(1+t^2)^2} = 3(1+t^2)$ car $1+t^2>0$.

Ceci montre que $\underline{T}(t)$ est défini pour tout t et

$\underline{T}(t) = \frac{1}{1+t^2}(1-t^2, 2t)$

2. La normale principale $\underline{N}(t)$ est définie si $\|\underline{T}'(t)\| > 0$.

$\underline{T}'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}(1-t^2, 2t) + \frac{1}{1+t^2}(-2t, 2)$

$\underline{T}'(t) = \frac{2}{(1+t^2)^2}(-t+t^3, -2t^2) + \frac{2}{(1+t^2)^2}(-t-t^3, 1+t^2)$

$$\underline{T}'(t) = \frac{2}{(1+t^2)^2}\left(-2t, 1-t^2\right) ; \quad \|\underline{T}'(t)\| = \frac{2}{(1+t^2)^2}\sqrt{4t^2+(1-t^2)^2}$$

$\|\underline{T}'(t)\| = 2/(1+t^2)$; $\|\underline{T}'(t)\| > 0$ et donc $\underline{N}(t)$ est défini $\forall t$.

$$\underline{N}(t) = \underline{T}'(t) / \|\underline{T}'(t)\| = \frac{1}{1+t^2}\left(-2t, 1-t^2\right)$$

3. La courbure est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)\|}{\|\underline{r}'(t)\|^3}$$

$$\underline{r}''(t) = 3(-2t, 2) = 6(-t, 1)$$

$$\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t) = 18 \det \begin{bmatrix} 1-t^2 & -t \\ 2t & 1 \end{bmatrix} = 18(1-t^2+2t^2) = 18(1+t^2)$$

$$\kappa(t) = \frac{18(1+t^2)}{27(1+t^2)^3} = \frac{2}{3}\frac{1}{(1+t^2)^2}$$

Le centre de courbure est donné par

$$(x_c(t), y_c(t)) = (x(t), y(t)) + R(t)\,\underline{N}(t)$$

$$R(t) = 1/\kappa(t) = \frac{3}{2}(1+t^2)^2$$

$$x_c(t) = 3t - t^3 + \frac{3}{2}(1+t^2)^2 \frac{1}{(1+t^2)}(-2t)$$

$$x_c(t) = 3t - t^3 - 3t(1+t^2) = -4t^3.$$

$$y_c(t) = 3t^2 + \frac{3}{2}(1+t^2)^2\frac{1}{(1+t^2)}(1-t^2)$$

$$y_c(t) = 3t^2 + \frac{3}{2}(1+t^2)(1-t^2) = 3t^2 + \frac{3}{2}(1-t^4)$$

$$y_c(t) = -\frac{3}{2}t^4 + 3t^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(1+\sqrt{2}-t^2)(\sqrt{2}-1+t^2)$$

N.B. On peut calculer la courbure par une autre méthode

$$\|\partial_t T(t)\| = \|\partial_s T(s)\|\,\|\partial_t s\| = \kappa(t)\,\|\underline{r}'(t)\|$$

D'où $\kappa(t) = \|T'(t)\| / \|r'(t)\| = \frac{2}{1+t^2} / 3(1+t^2)$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{(1+t^2)^2}$$