De la même façon on obtient $\beta = \langle w, v_2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}$,

donc $w_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} v_2 = \frac{1}{5}(3, 1, -1, -3)$.

Ensuite, $w_2 = w - w_1 = \frac{1}{5}(2, -1, -4, 3)$.

<u>Thm. de Pythagore</u> :

$\langle w_1, w_2 \rangle = 0$; on va vérifier que

$\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2$.

$w_1 + w_2 = w = (1, 0, -1, 0) \Rightarrow \|w_1 + w_2\|^2 = 2$

$\|w_1\|^2 = \frac{1}{25} \cdot 20 = \frac{4}{5}$; $\|w_2\|^2 = \frac{1}{25} \cdot 30 = \frac{6}{5}$

On obtient en effet $\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 = 2$.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$

1) On remarque que les colonnes de A sont des vecteurs orthogonaux et que les colonnes 2 et 3 sont des vecteurs normés.

Il faut : $\begin{cases} \cdot\ A \text{ orthogonale} \\ \cdot\ \det(A) = 1 \end{cases}$

On doit donc avoir $\frac{1}{49}\left[(6a)^2 + (-2a)^2 + (3a)^2\right] = 1$

(pour que le 1er vecteur colonne soit normé)

donc on déduit $a = \pm 1$.

Pour $\boxed{a=1}$ on calcule le déterminant

$$\frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{7^2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{7^2}\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{-2} \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{7^2} \cdot (24 + 25) = 1.$$

Donc pour $a = 1$, A est la matrice d'une rotation.

2) $A - Id = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} - Id = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$(A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y - 2z = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = y = z}$

$\Rightarrow \exists$ une solution non-nulle $\Rightarrow$ 1 est valeur propre

et $E_1 = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$.

3) Si $\boxed{v = (1, 1, 1)}$, alors $Av = v$

$\Rightarrow$ la droite vectorielle engendrée par v reste inchangée par la rotation

$\Rightarrow$ rotation autour de l'axe de vecteur directeur v.

Il existe une base dans laquelle la matrice semblable à A est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$

On a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$

$\Rightarrow 1 + 2\cos\theta = \frac{18}{7} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{11}{14}}$

4) $w = (1, -1, 0)$ est orthogonal à l'axe.

Le signe de $\sin(\theta)$ est le même que le signe du produit mixte $[w, Aw, v] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{7} & 1 \\ -1 & -\frac{8}{7} & 1 \\ 0 & \frac{5}{7} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{7} & 1 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 2 \\ 0 & \frac{5}{7} & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \times \left(\frac{-15}{7}\right) \boxed{< 0}$

$\hookrightarrow \sin(\theta) < 0$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{11}{14}\right)}$

(*) <u>Une autre méthode pour trouver $\cos(\theta)$</u> :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle w, Aw \rangle}{\|w\| \cdot \|Aw\|} = \frac{11/7}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{11}{14}.$$

$\langle w, Aw \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ 5/7 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{11}{7}$ et $\|Aw\| = \|w\|$ car isométrie

Correction CC 1 Maths, 2IC+FAS, 2013-2014

$\boxed{\text{Exc. 1}}$ 1) Par dédoublement on obtient

$$f(v,v') = xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z)$$

$$= (x\ y\ z)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 1 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$ est une <u>forme bilinéaire symétrique</u>

où $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

et <u>$g(v) = f(v,v)$</u>

↳ g est une forme quadratique de matrice A.

2) • f bilin. symétrique

• f positive car $g(x,y,z) = \frac12(x^2+y^2+z^2) + \frac12\{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\}$

$$= \frac12(x^2+y^2+z^2) + \frac12(x+y+z)^2 \geq 0 \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$$

• f définie car si $g(x,y,z) = 0$, alors $x = y = z = 0$.

↳ f est un produit scalaire.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) u_1 et u_2 pas colinéaires $\rightarrow \{u_1,u_2\}$ libre et base dans E

$\rightarrow \dim(E) = 2$

Par la méthode de Gram-Schmidt :

• $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac12(1,1,1,1)$

• $\tilde{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = (1,2,3,4) - 5\cdot\frac12(1,1,1,1) = \frac12(-3,-1,1,3)$

$v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{2\sqrt5}(-3,-1,1,3)$. ; $\{v_1,v_2\}$ base orthonormé de E

2) $E^\perp = \{u \in \mathbb{R}^4 : \langle u,u_1\rangle = 0,\ \langle u,u_2\rangle = 0\}$

$= \{u \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0,\ x+2y+3z+4t=0\}$

$u = (x,y,z,t)$

$= \{u \in \mathbb{R}^4 : u = (x,y,-3x-2y, 2x+y),\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}\,(\underbrace{(1,0,-3,2)}_{u_3}, \underbrace{(0,1,-2,1)}_{u_4})$

u_3 et u_4 ne sont pas orthonormés $\rightarrow$ on applique le procédé de Gram-Schmidt

• $v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,0,-3,2)$

• $\tilde{v}_4 = u_4 - \langle u_4, v_3\rangle v_3 = (0,1,-2,1) - \frac{1}{14}\cdot 8\cdot(1,0,-3,2) = \frac17(-4,7,-2,-1)$.

$v_4 = \frac{\tilde{v}_4}{\|\tilde{v}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}(-4,7,-2,-1)$.

↳ $\{v_3,v_4\}$ base orthonormée de $E^\perp$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

3) $w = e_1 - e_3$

$$P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac12 & -\frac{3}{2\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{4}{\sqrt{70}} \\ \frac12 & -\frac{1}{2\sqrt5} & 0 & \frac{7}{\sqrt{70}} \\ \frac12 & \frac{1}{2\sqrt5} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{70}} \\ \frac12 & \frac{3}{2\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

P est une matrice orthogonale $\rightarrow P^{-1} = P^T$

$$\rightarrow P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ -\frac{3}{2\sqrt5} & -\frac{1}{2\sqrt5} & \frac{1}{2\sqrt5} & \frac{3}{2\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{4}{\sqrt{70}} & \frac{7}{\sqrt{70}} & -\frac{2}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array} = P^{-1}_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = P^T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$$

$\rightarrow e_1 = \frac12 v_1 - \frac{3}{2\sqrt5}v_2 + \frac{1}{\sqrt{14}}v_3 - \frac{4}{\sqrt{70}}v_4$

$e_3 = \frac12 v_1 + \frac{1}{2\sqrt5}v_2 - \frac{3}{\sqrt{14}}v_3 - \frac{2}{\sqrt{70}}v_4$

$\rightarrow w = e_1 - e_3 = \underbrace{-\frac{2}{\sqrt5}v_2}_{w_1 \in E} + \underbrace{\frac{4}{\sqrt{14}}v_3 - \frac{2}{\sqrt{70}}v_4}_{w_2 \in E^\perp}$

$$\begin{cases} w_1 = \frac15(3,1,-1,-3) \\ w_2 = \frac27(1,0,-3,2) - \frac{1}{35}(-4,7,-2,-1) = \frac{1}{35}(14,-7,-28,21) \\ \quad = \frac15(2,-1,-4,3). \end{cases}$$

(*) <u>Une autre méthode</u> :

$w = w_1 + w_2$, avec $w_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$

$\rightarrow \langle w, v_1\rangle = \alpha\underbrace{\langle v_1,v_1\rangle}_{1} + \beta\underbrace{\langle v_2,v_1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle w_2,v_1\rangle}_{0}$

$\rightarrow \alpha = \langle w, v_1\rangle = 0$