I.N.S.A de TOULOUSE 9 janvier 2014
Département STPI, 2ème année IC+FAS

# Examen de Mathématiques

**Durée 1h30.**

*Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.*
*Le barême est indicatif.*

**Exercice 1.** (5 points)

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$. On cherche les solutions $f : U \to \mathbb{R}$ de l'équation

$$(E) \qquad x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = 2\left(x^2 + y^2\right), \quad \forall (x,y) \in U.$$

Pour résoudre l'équation précédente, on passe en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et on pose $h(r,\theta) = f(x,y)$.

1. Exprimer $\partial_r h$ en fonction de $\partial_x f$ et $\partial_y f$ et en déduire la relation
$$r\partial_r h(r,\theta) = x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y).$$
2. Montrer que $f$ vérifie l'équation $(E)$ si et seulement si $h$ vérifie l'équation
$$(E') \qquad \partial_r h(r,\theta) = 2r.$$
3. Déterminer les solutions $h$ de l'équation $(E')$.
4. En remarquant que, pour $(x,y) \in U$, on a $\theta = \arccos\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)$, en déduire les solutions $f : U \to \mathbb{R}$ de l'équation $(E)$.

**Exercice 2.** (5 points)

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. Déterminez les points critiques de $g$.
2. Déterminez les points d'extremum local de $g$, en précisant leur nature (minimum/maximum).
3. La fonction $g$ admet-elle un extremum (minimum/maximum) global ?

Tourner la page S.V.P. .../...

**Exercice 3.** (5 points)

Soit le domaine $D$ défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ x + y > 0,\ y - x > 0\}.$$

1. Représentez graphiquement le domaine $D$ et précisez, si c'est le cas, son ou ses axes de symétrie.
2. Donnez l'aire de $D$.
3. Calculez les intégrales doubles suivantes :

$$I_1 = \int\int_D x dx dy, \quad I_2 = \int\int_D y dx dy.$$

**Exercice 4.** (5 points)

On considère la courbe d'équations paramétriques

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \qquad x(t) = 3t - t^3,\ y(t) = 3t^2.$$

1. Montrer que le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}(t)$ est défini pour tout $t$ et qu'il est donné par

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(1 - t^2, 2t\right).$$

2. Montrer que la normale principale $\mathbf{N}(t)$ à la courbe est aussi définie pour tout $t$ et la calculer.
3. Calculer la courbure $\kappa(t)$ au point $(x(t), y(t))$ et les coordonnées $(x_c(t), y_c(t))$ du centre de courbure de la courbe en ce point.