INSA Toulouse. STPI $2^{\text{ème}}$ année IC 6 novembre 2013

Contrôle de Mathématiques

Documents, calculatrices et portables interdits. Durée 1h15

Exercice 1 (5 points)

Soit l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Montrer que la forme polaire f de q est un produit scalaire.

   Indication: Vous pourriez utiliser l'identité

   $$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Exercice 2 (8 points)

On considère l'espace $\mathbb{R}^4$, identifié à l'espace des vecteurs colonnes à 4 composantes, muni de son produit scalaire canonique que l'on notera $\langle u, v\rangle$ pour u, $v \in \mathbb{R}^4$.

1. Soient $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^\top$ et $E = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$. Montrer que E est de dimension 2 et déterminer une base orthonormée $\{v_1, v_2\}$ de E.
2. Soit $E^\perp = \{u \in \mathbb{R}^4 : \langle u, v\rangle = 0,\ \forall v \in E\}$ le sous-espace orthogonal de E.

   Déterminer $E^\perp$ et en donner une base orthonormée $\{v_3, v_4\}$.

   En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ différente de la base canonique.
3. Soit le vecteur $w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Décomposer ce vecteur sous la forme $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in E$ et $w_2 \in E^\perp$.

   Vérifier le théorème de Pythagore pour les vecteurs w_1 et w_2 de la question précédente.

.../... Tourner S.V.P.

Exercice 3 (7 points)

Soit la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6a & 3 & -2 \\ -2a & 6 & 3 \\ 3a & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelle valeur de a, la matrice A est-elle la matrice d'une rotation ?
2. Montrer que, pour cette valeur de a, la matrice A admet 1 comme valeur propre et donner l'espace propre associé.
3. En déduire que pour cette valeur de a, la rotation précédente est une rotation d'angle θ autour d'un axe dont on précisera le vecteur directeur v ainsi que $\cos\theta$.
4. En considérant le vecteur $w = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, déterminer l'angle θ de la rotation.