Contrôle de Mathématiques

Durée de l'examen : 1h.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 (14 points)

Pour a réel donné, on considère la forme quadratique q_a définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q_a(v) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a\,(xy + xz + yz)\,,\ \forall\ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Écrire la forme polaire f_a associée à q_a, puis donner sa matrice A_a dans la base canonique.
2. Pour $a = 1$, montrer, directement sans passer par les valeurs propres, que q_1 est positive. La forme polaire f_1 est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
   Indication : On pourra utiliser l'identité :
   $$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$
3. Montrer que pour a quelconque, le polynôme caractéristique de la matrice A_a est le suivant :
   $$P_a(\lambda) = (1 + 2a - \lambda)(1 - a - \lambda)^2.$$
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des valeurs de a pour lesquelles l'espace $(\mathbb{R}^3, f_a)$ est euclidien.

   Pour les questions suivantes, on considère $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$.
5. Déterminer une base directe $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice A_a et orthonormée pour le produit scalaire canonique.
6. Donner la matrice de q_a dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, donner l'expression de $q_a(v)$ en fonction des composantes (x', y', z') de v dans la base $\mathcal{B}$.
7. On note $||.||_a$ la norme euclidienne associée au produit scalaire f_a. Donner $||v_1||_a$, $||v_2||_a$ et $||v_3||_a$.
8. La base $\mathcal{B}$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire f_a ? orthonormée ?
9. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour le produit scalaire f_a.

Exercice 2 (6 points)

Soient les vecteurs $u_1 = (-2, 0, 0)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (0, -1, 2)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est orthogonale. Justifier que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ différente de la base canonique.
3. Pour $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$, déterminer le sous-espace orthogonal $F^\perp$.
4. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$ dans la base canonique.