INSA TOULOUSE Année 2012-2013
Département STPI. $2^{\text{ème}}$ année IC

Feuille de TD numéro 4

Exercice 1. (Longueur de courbe)

1. Déterminer la longueur d'un arc de courbe M_0M_t $(t > 0)$ pour la courbe
$$x(t) = t - \operatorname{ch} t \ \operatorname{sh} t, \qquad y(t) = 2 \operatorname{ch} t.$$
2. Même question pour l'arc M_0M_θ $(\theta > 0)$ pour la courbe donnée en coordonnées polaires par $r(\theta) = \operatorname{th}(\theta/2)$.

Exercice 2. On considère la courbe $\mathcal{C}$ (appelée *astroïde*) décrite par le point $M(t)$ de coordonnées
$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t,$$
avec $t \in [0, 2\pi]$ et $a > 0$.

1. Calculer la longueur L de la courbe $\mathcal{C}$.
2. En tout point $M(t)$ de la courbe pour lequel il est possible, déterminer $T(t)$ et $N(t)$, les vecteurs tangent et respectivement normal de la base de Frenet.
3. Déterminer la courbure $\kappa(t)$ et le rayon de courbure $R(t)$ en tout point $M(t)$ de la courbe. Pour quelles valeurs de t ces deux quantités n'existent pas?

Exercice 3. Soit s une abscisse curviligne sur un arc de courbe Γ du plan. On note par $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{N}(s)$ le repère de Frenet au point M_s de Γ. On note par $\theta(s)$ l'angle que fait $\mathbf{T}(s)$ avec l'axe des abscisses.

1. On suppose pour simplifier que $\theta'(s) \geq 0$. Montrer que $\kappa(s) = \theta'(s)$.
2. En déduire que si $\kappa(s) = 1/R > 0$, alors Γ est un arc de cercle.
3. Déduire de même que si $\kappa(s) = 0$, alors Γ est un segment de droite.

Exercice 4. L'objet de l'exercice est de déterminer toutes les courbes de l'espace dont la courbure et la torsion sont respectivement données à l'aide d'une abscisse curviligne s par $\kappa(s) = 1/s\sqrt{2}$ et $\omega(s) = -\kappa(s) = -1/s\sqrt{2}$.

1. En utilisant les relations de Frenet, montrer que pour une telle courbe, si $\mathbf{T}(s)$ est le vecteur tangent unitaire du repère de Frenet, on a

$$s^2\mathbf{T}''(s) + s\mathbf{T}'(s) + \mathbf{T}(s) = \mathbf{K},$$

   où $\mathbf{K}$ est un vecteur constant.

2. En faisant le changement de variable $s = e^u$, montrer que la solution générale de l'équation différentielle

$$s^2y''(s) + sy'(s) + y(s) = k,$$

   où k est une constante, s'écrit

$$y(s) = z(u) = c\cos u + d\sin u + k.$$

3. En déduire que l'expression d'une courbe précédente à l'aide du paramètre u est donnée par

$$M_u = e^u\left(\mathbf{A}\cos u + \mathbf{B}\sin u + \mathbf{K}\right) + \mathbf{E},$$

   où $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$ sont trois vecteurs constants.

Exercice 5. **(Surface dont le plan tangent coupe l'axe Oz en un point fixe)**
On considère la surface Γ d'équations paramétriques

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = f(r,\theta),$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donnée.

1. Donner l'équation du plan tangent à la surface en un point $M_{r,\theta}$.

2. Déterminer f de sorte que le long d'une ligne $\theta =$ constante, le plan tangent coupe Oz en un point fixe.