

Feuille de TD numéro 3

Exercice 1.

Calculer l'intégrale double $I = \iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y} dx dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

Exercice 2.

Soit le domaine D défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x+y > 0, x-y > 0\}$.

1. Représenter graphiquement le domaine D et étudier ses symétries.
2. Calculer l'aire de D .
3. Calculer les intégrales doubles suivantes:

$$I_1 = \iint_D (x+y) dx dy, \quad I_2 = \iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}.$$

Exercice 3.

Soit $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ et $K_R = [0, R] \times [0, R]$, pour $R > 0$.

1. Calculer $\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.
2. Montrer que, pour tout $R > 0$, on a les inégalités suivantes:

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

3. En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale de Gauss: $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Exercice 4.

Identifier les ensembles suivants et calculer leur volume:

1. $D_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ avec $a, b, c > 0$. Qu'obtient-on dans le cas particulier $a = b = c = 1$?
2. $D_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z \leq 1 \right\}$.

Exercice 5.

Soit une plaque homogène dont la forme est donnée par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 9 < 0, (x-1)^2 + y^2 > 1\}.$$

1. Représenter graphiquement D et justifier que l'axe Ox est un axe de symétrie pour D .
2. Calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie (centre de gravité) G de la plaque:

$$x_G = \frac{\int_D x dx dy}{\int_D dx dy}, \quad y_G = \frac{\int_D y dx dy}{\int_D dx dy}.$$