Feuille de TD numéro 2

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq b\}$ est fermé et que $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < b\}$ est ouvert.

2. En déduire la nature des ensembles suivants :

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leq 4\}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\},$$
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + 3y - 4z \leq 3\}.$$

   Dans les cas appropriés, on vérifiera également s'il s'agit d'un compact.

Exercice 2

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Étudier la continuité de f puis déterminer ses dérivées partielles (si elles existent).

2. On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{y^2}{\tan(|x|+|y|)}$ sur $\Omega :=]-\pi/2, \pi/2[^2$. Déterminer l'ensemble de définition de f (restreinte à Ω) puis étudier si cette fonction est prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Écrire l'équation du plan tangent à $\mathcal{C}_f$ au point $(1,1)$.

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1,x_2,x_3) = (\frac{1}{2}(x_1^2 - x_3^2), \sin(x_1+x_2))$. Justifier la différentiabilité de f puis écrire la matrice jacobienne associée.

2. Soit g la fonction définie par $g(y_1,y_2) = (y_1 - e^{y_2}, \frac{1}{2-y_2})$. Soit $h := g \circ f$. Après avoir déterminé l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h puis justifié la différentiabilité de h sur $\mathcal{D}_h$, écrire la matrice jacobienne de h.

Exercice 5

Soit la fonction $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y) = (u,v)$ avec $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = y$.

1. Montrer que Φ est une bijection de $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x < y\}$ sur $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ u + 2v^2 > 0\}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ ainsi que son inverse.

   Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω vérifiant
   $$(x+y)\partial_x f(x,y) + (x-y)\,\partial_y f(x,y) = 0, \text{ pour tout } (x,y) \in \Omega.$$

2. Montrer que la fonction g définie sur V par $g(u,v) = f(x,y)$, avec u et v liés par les relations ci-dessus à x et y, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et qu'elle vérifie une équation qu'on résoudra.

3. Résoudre alors l'équation en f ci-dessus.

Exercice 6

On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

N.B. Cette équation s'appelle l'équation des cordes vibrantes car le mouvement d'une corde attachée à ses extrémités (comme une corde de violon par exemple) est régi par ce type d'équation.

1. Montrer que pour f solution de (1), la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(u,v) = f(x,t)$, avec $u = x - ct,\ v = x + ct$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie :
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0, \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

3. Trouver la solution de (1) qui vérifie en plus $f(x,0) = \cos x$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$. Interpréter le résultat.

Exercice 7

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) au point a de Ω s'il existe $R > 0$ tel que
$$\forall x \in B(a,R) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < R\}, \quad f(x) \le f(a) \ (\text{resp.} f(x) \ge f(a)).$$

1. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Montrer que si a est un extremum local, alors a est nécessairement un point critique, *i.e* $\partial_{x_i} f(a) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

2. On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et que a est un point critique pour f. Montrer que si la matrice Hessienne $Hf(a)$ au point a est définie positive (resp. négative), alors a est un minimum local (resp. maximum local).

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.
   (a) Déterminer les extrêmums locaux de f (ainsi que leur nature).
   (b) La fonction f a-t-elle un minimum ou un maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$?
   (c) Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$. Déterminer $M = \sup_{(x,y) \in T} f(x,y)$ et $m = \inf_{(x,y) \in T} f(x,y)$.

Exercice 8

Déterminer les extrêmums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$.