

Feuille de TD numéro 1

Exercice 1.

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}.$$

On exprimera le polynôme Δ_2 sous forme d'un produit de facteurs.

Exercice 2.

On considère la matrice réelle A de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A .
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de A et écrire la matrice semblable à A dans cette base.

Exercice 3.

Soit f une application définie sur \mathbb{R}^2 muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ par :

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer la matrice A de f dans la base \mathcal{E} par deux méthodes: avec la définition et à l'aide d'une factorisation.
3. Trouver la matrice B de f dans la base $\mathcal{U} = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (1, 1)\}$ et donner ensuite l'expression de f dans cette base.
4. Vérifier la formule $B = P^T A P$, où P est la matrice de passage entre les bases \mathcal{E} et \mathcal{U} .

Exercice 4.

Soit \mathbb{R}^3 l'espace euclidien canonique muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit le polynôme homogène en x, y, z et de degré 2 : $q(v) = x^2 - 2yz + xz$, où $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que ce polynôme est une forme quadratique de \mathbb{R}^3 et écrire la forme polaire associée f .
2. Écrire la matrice A de q dans la base \mathcal{E} .
3. On considère la nouvelle base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$v_1 = e_1, v_2 = 2e_1 + e_2 - 4e_3 \text{ et } v_3 = -\frac{1}{2}e_1 + e_3.$$

- (a) Écrire la matrice de q dans la base \mathcal{V} . Donner l'expression de q dans cette base.
- (b) q est-elle définie, positive ? La forme polaire f est-elle un produit scalaire?

Exercice 5.

Soit $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace euclidien canonique, orienté par la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 par:

$$q(v) = (1 - a)(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(xy + xz + yz), \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1. Écrire la forme bilinéaire f associée à q et donner sa matrice A dans la base canonique.
2. Déterminer, pour a quelconque, les valeurs propres de la matrice A .
3. Pour quelles valeurs de a la forme bilinéaire f est-elle positive? définie?
4. Pour quelles valeurs de a l'espace (\mathbb{R}^3, f) est euclidien?
5. Déterminer une base directe \mathcal{V} de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de A et orthonormée pour le produit scalaire canonique.
6. Écrire la matrice de passage P entre les bases \mathcal{E} et \mathcal{V} et montrer qu'elle est orthogonale. Préciser la nature de la transformation géométrique associée à la matrice P .
7. Donner la matrice de q dans la base \mathcal{V} , ainsi que l'expression de q dans cette base.

Exercice 6.

Soit u un vecteur non nul de l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^n et soit U sa matrice colonne dans la base canonique. On définit par P_u la matrice suivante:

$$P_u = I_n - \frac{1}{\|U\|^2}UU^T$$

et par p_u l'application linéaire associée à P_u . On note D la droite vectorielle engendrée par u .

1. Montrer que la matrice P_u est symétrique.
2. Montrer que $\forall v \in D, p_u(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall w \in D^\perp, p_u(w) = w$.
3. En déduire la nature géométrique de la transformation définie par p_u .

Exercice 7.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique. Soit q la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique \mathcal{E} est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f la forme polaire associée à q .

1. Pour $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ dans \mathbb{R}^3 , donner l'expression de $f(v, v')$ et $q(v)$.
2. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de \mathbb{R}^3 formée des vecteurs suivants:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = -\frac{1}{2}e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad v_3 = -e_2 + e_3.$$

Donner la matrice de q dans la base \mathcal{B} , puis l'expression de q dans cette base.

3. La forme quadratique q est-elle positive? définie? La forme polaire f est-elle un produit scalaire?

Pour les questions suivantes, on considère l'espace euclidien (\mathbb{R}^3, f) .

4. La base \mathcal{E} est-elle orthogonale pour f ?
5. A l'aide des questions précédentes, donner une base de \mathbb{R}^3 qui est orthogonale pour f . En déduire une base de \mathbb{R}^3 orthonormée pour f .
6. Soit $v = e_1 - 2e_2$ et $v' = e_2 - e_3$. Montrer que v et v' sont orthogonaux pour f et vérifier ensuite le théorème de Pythagore.
7. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Déterminer F^\perp , l'orthogonal de F pour le produit scalaire f .
8. Soit p_{F^\perp} la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur F^\perp . Donner la matrice de p_{F^\perp} dans la base canonique \mathcal{E} .

Exercice 8.

Soit \mathbb{R}^3 l'espace euclidien canonique. On considère la matrice

$$A_a = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2a & 6 & -3 \\ -6a & 3 & 2 \\ 3a & 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice A_a soit orthogonale.
2. On suppose $a = 1$. Montrer que A_1 est la matrice d'une rotation autour d'un axe dont on déterminera l'axe et l'angle.