INSA de Toulouse - PO IC2 Mardi 8 mars 2011
UF de Mathématiques/Mécanique

Examen de rattrapage – Mathématiques

Durée 1 heure 30 min.

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (6 points)

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$, avec $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (2, 1)$.

Soit $v = xe_1 + ye_2$ et $v' = x'e_1 + y'e_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit f la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(v, v') = xx' + 6yy' - 2xy' - 2x'y.$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{E}$.
2. La matrice A est-elle orthogonale ? Justifier votre réponse.
3. Ecrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{V}$.
4. Pour deux vecteurs $v = Xv_1 + Yv_2$ et $v' = X'v_1 + Y'v_2$, exprimer $f(v, v')$ en fonction de X, Y, X' et Y'.
5. Soit q la forme quadratique associée à f. Donner l'expression de $q(v)$ pour $v = Xv_1 + Yv_2$.
6. La forme quadratique q est-elle positive ? négative ? définie ? Justifier vos réponses.
7. Montrer que f est un produit scalaire.

   Dans toute la suite on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire f.

8. La base $\mathcal{E}$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire f ? La base $\mathcal{V}$ est-elle orthogonale pour f ? orthonormée ? Justifier vos réponses.
9. Donner une base $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^2$ orthonormée pour le produit scalaire f.
10. Soit $F = \text{Vect}(v_2)$. Determiner $F^\perp$, le sous-espace vectoriel orthogonal à F pour le produit scalaire f.

Exercice 2 (5 points)

On s'intéresse aux vibrations d'une corde flexible de longueur infinie. On décrit l'amplitude des déplacements de la corde par une fonction $f(x, t)$. Fixons $c > 0$ la vitesse de l'onde.

La fonction f (supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$) vérifie l'équation :

$$(E) \qquad \partial^2_{xx} f - \frac{1}{c^2} \partial^2_{tt} f = 0.$$

1. On pose $u = x - ct, v = x + ct$ et $g(u, v) = f(x, t)$.
   Exprimer les dérivées partielles secondes de f à l'aide des dérivées partielles de g.
2. En déduire que f satisfait (E) si et seulement si

$$\partial^2_{uv} g = 0.$$

3. On pose $G(u,v) = \partial_u g(u,v)$.
   Montrer qu'il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $G(u,v) = a(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$.
4. Soit A une primitive de la fonction a.
   Montrer qu'il existe une fonction $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que

$$g(u,v) = A(u) + B(v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (*Indication* : dériver $g(u,v) - A(u)$ par rapport à u.)
5. En déduire que toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$f(x,t) = A(x+ct) + B(x-ct), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

   avec A et B des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 3 (5 points)

On se propose de calculer l'intégrale suivante, appelée l'intégrale de Gauss

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

dont on admet la convergence.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Soit $a > 0$. Exprimer en fonction de $F(a)$ l'intégrale

$$I_a = \int\int_{[0,a]^2} g(x,y) dxdy.$$

2. Soit $R > 0$. Calculer, à l'aide d'un changement en coordonnées polaires, l'intégrale

$$J_R = \int\int_{D_R} g(x,y) dxdy,$$

   avec $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
3. Soit $R > 0$. Dessiner sur le même graphe les ensembles $[0,R]^2$, D_R et $D_{R\sqrt{2}}$ et montrer que

$$J_R \leq I_R \leq J_{R\sqrt{2}}.$$

4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

   (*Indication* : la questions 2 est indépendante de la question 1.)

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.

1. Déterminer les extrema locaux de la fonction f, ainsi que leur nature (maximum/minimum).
2. Ecrire le développement de Taylor pour la fonction f au voisinage du point $(1,4)$.
3. En déduire que

$$f(x,y) \geq -14, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$