IC 2011-12 Rattrapage

Exercice 1 1. Par la méthode de dédoublement des variables

$q(x,y) = xx' - \frac{1}{2}(xy' + x'y) + yy'$

$q(x,y) = [x\ y] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

2 Forme polaire : $((x,y),(x',y')) \mapsto [x\ y] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

3. 1ère méthode $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$

$(1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = (1-\lambda-\frac{1}{2})(1-\lambda+\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-\lambda)(\frac{3}{2}-\lambda)$

Val. propres : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} > 0$; d'où la forme bilinéaire définit un pd scalaire

2ème méthode $\det \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}$; $\lambda_1\lambda_2 > 0$

Trace $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = 2 = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$; d'où $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

et donc la forme bil. définit un pd. scalaire

Exercice 2 1. Chacune des applications composantes $(x,y) \mapsto u = xy$ et $(x,y) \mapsto v = x+y$ est C^∞ par les thms généraux.

x et y sont les racines du trinôme

$X^2 - vX + u = 0$; $\Delta = v^2 - 4u > 0$ pour u et v dans H. Comme $x > y$

$x = \frac{v + \sqrt{v^2-4u}}{2}$, $y = \frac{v - \sqrt{v^2-4u}}{2}$

Comme tout $(u,v) \in H$ a un antécédent et un seul dans D, l'application est donc bijective.

2 $f(x,y) = g(u,v)$

$\partial_x f(x,y) = \partial_u g(u,v)\partial_x u + \partial_v g(x,y)\partial_x v$

$\partial_x f(x,y) = \partial_u g(u,v)\, y + \partial_v g(u,v)$

$\partial_y f(x,y) = \partial_u g(u,v)\partial_y u + \partial_v g(u,v)\partial_y v$

$\partial_y f(x,y) = \partial_u g(u,v)\, x + \partial_v g(u,v)$

3 $x\partial_x f(x,y) - y\partial_y f(x,y) = xy\,\partial_u g(u,v) + x\partial_v g(u,v)$
$- xy\,\partial_u g(u,v) - y\partial_v g(u,v)$

$x\partial_x f(x,y) - y\partial_y f(x,y) = (x-y)\,\partial_v g(u,v) = x-y$

Comme $x-y>0$ dans D, il vient

$\partial_v g(u,v) = 1$

4. On a $\partial_v\big(g(u,v) - v\big) = 0$; donc

$g(u,v) - v = h(u)$; d'où les sol. de classe C^1 de (E)

$f(x,y) = x+y+h(xy)$

où h est une fonction arbitraire.

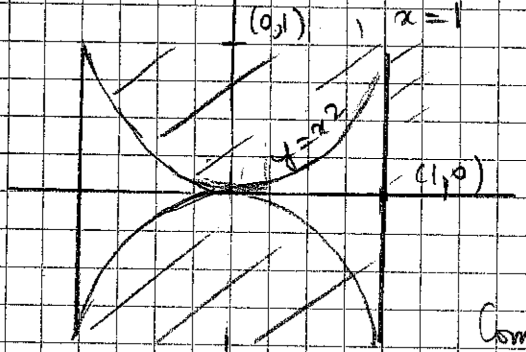
①

Exercice 3

1. D est invariant lorsqu'on remplace x par $-x$ et lorsqu'on remplace y par $-y$; D est donc symétrique par rapport à l'axe des x et par rapport à celle des y. Il suffit donc de représenter

$$\tilde{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x\leq 1,\ y\leq x^2\}$$

et de compléter par symétrie



2. $I = \int_D (x^2 - y)\,dx\,dy$

$= \int_D x^2\,dx\,dy - \int_D y\,dx\,dy$

Comme y est impaire par rapport à y, on a donc $\int_D y\,dx\,dy = 0$.

$\int_D x^2\,dx\,dy = 4\int_{\tilde{D}} x^2\,dx\,dy$

$= 4\int_{x=0}^{1} x^2\left\{\int_{y=0}^{x^2} dy\right\}dx = 4\int_0^1 x^4\,dx$

$I = \frac{4}{5}$.

Exercice 4

1. Équations normales

$\partial_x f(x,y) = \cos x = 0$, $\partial_y f(x,y) = 2y - 2$

D'où les points critiques $\left(x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, y_k = 1\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. On calcule le hessien

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad Hf(x_k,y_k) = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour $k = 2l$, (x_k, y_k) est un point col $(\lambda_1\lambda_2 < 0)$

Pour $k = 2l+1$, f a un minimum local au pt (x_k, y_k).

Exercice 5

1. $r'(\theta) = e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta, \cos\theta + \sin\theta)$

$r'(\theta) = e^{\theta}\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

D'où $T(\theta) = \left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2. $\int_0^{2\pi} \|r'(\theta)\|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,e^{\theta}\,d\theta = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right)$

3. $\kappa(\theta) = |r''(\theta)\times r'(\theta)| / \|r'(\theta)\|^3$

$r''(\theta) = \partial_\theta\left(\sqrt{2}\,e^{\theta}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) =$

$= r'(\theta) + \sqrt{2}\,e^{\theta}\left(-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$r''(\theta)\times r'(\theta) = \left(\sqrt{2}\,e^{\theta}\right)^2 \det\begin{bmatrix} -\sin(\theta+\pi/4) & \cos(\theta+\pi/4) \\ \cos(\theta+\pi/4) & \sin(\theta+\pi/4) \end{bmatrix}$

$|r''(\theta)\times r'(\theta)| = \left(\sqrt{2}\,e^{\theta}\right)^2\left(\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\sqrt{2}\,e^{\theta}\right)^2$

$\kappa(\theta) = 1/\sqrt{2}\,e^{\theta}$