Examen de rattrapage

IC2, 8 mars 2011

Exc. 1 $\quad f(v, v') = xx' + 6yy' - 2xy' - 2x'y$

1) $$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) \\ f(e_1, e_2) & f(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

2) A n'est pas orthogonale, car les colonnes ne sont pas de norme 1
$$\|(1, -2)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \neq 1.$$

3) $v = (v_1, v_2)$, $\quad v_1 = (1, 0)$, $\quad v_2 = (2, 1)$.

I. Méthode directe :
$$B = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) \\ f(v_1, v_2) & f(v_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1, v_1) = f(e_1, e_1) = 1$$
$$f(v_1, v_2) = 1 \cdot 2 + 6 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$
$$f(v_2, v_2) = 4 + 6 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

II. Avec chang. de base :
$$P = P_{\mathcal{E}v} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

$$B = P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) $v = X v_1 + Y v_2$

$v' = X' v_1 + Y' v_2$

$f(v, v') = XX' + 2YY'$.

5) $q(v) = f(v, v) = X^2 + 2Y^2$.

6) $q(v) \geqslant 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow q$ positive

donc q n'est pas négative

$q(v) = 0 \Rightarrow X^2 + 2Y^2 = 0 \Rightarrow X = Y = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow q$ définie

7) $\left.\begin{array}{l} q \text{ définie et positive} \\ f \text{ forme polaire de } q \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est un produit scalaire.

8) • $f(e_1, e_2) = -2 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}$ n'est pas orthogonale pour f

• $f(v_1, v_2) = 0 \Rightarrow \mathcal{V}$ est orthogonale pour f

Par contre, $f(v_2, v_2) = 2 \neq 1 \Rightarrow \mathcal{V}$ n'est pas orthonormée pour f.

9) $\mathcal{W} = \left(v_1, \dfrac{v_2}{\sqrt{f(v_2, v_2)}}\right) = \left((1, 0), \left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

$\sqrt{f(v_2, v_2)} = \sqrt{2}$

10) $F = \mathrm{Vect}(v_2) = \mathrm{Vect}(2, 1)$.

$F^\perp = \{ \cancel{v = (X, Y} \ v = X v_1 + Y v_2 : f(v, v_2) = 0 \}$

$\left.\begin{array}{l} f(v_1, v_2) = 0 \Rightarrow v_1 \in F^\perp \\ \dim(F^\perp) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{F^\perp = \mathrm{Vect}(v_1)}$.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ $u = x - ct$, $v = x + ct$

$g(u,v) = f(x,t)$

1) $f(x,t) = g(x-ct, x+ct)$

$\partial_x f(x,t) = \partial_u g(x-ct, x+ct) \cdot 1 + \partial_v g(x-ct, x+ct) \cdot 1$

$\left(\partial_u g(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \partial_v g(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

$\partial_x f(x,t) = \partial_u g(u,v) + \partial_v g(u,v)$

• $\underline{\partial^2_{xx} f(x,t)} = \partial^2_{uu} g(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \partial^2_{uv} g(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

$+ \partial^2_{uv} g(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \partial^2_{vv} g(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

$= \underline{\partial^2_{uu} g(u,v) + 2\, \partial^2_{uv} g(u,v) + \partial^2_{vv} g(u,v)}$.

• $\underline{\partial^2_{xt} f(x,t)} = \partial^2_{uu} g(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \partial^2_{uv} g(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} +$

$+ \partial^2_{uv} g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \partial^2_{vv} g \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$

$= -c\, \partial^2_{uu} g + \cancel{c\, \partial^2_{uv} g} - \cancel{c\, \partial^2_{uv} g} + c\, \partial^2_{vv} g$

$= \underline{c\left(\partial^2_{vv} g(u,v) - \partial^2_{uu} g(u,v) \right)}$

• $\partial_t f(x,t) = \partial_u g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \partial_v g \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -c \cdot \partial_u g + c \cdot \partial_v g$

$\Rightarrow \underline{\partial^2_{tt} f(x,t)} = c\Big(-\partial^2_{uu} g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \partial^2_{uv} g \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$

$+ \partial^2_{uv} g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \partial^2_{vv} g \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \Big)$

$= \underline{c^2\left(\partial^2_{uu} g + \partial^2_{vv} g - 2\, \partial^2_{uv} g \right)}$

2) f sol. de E

$\Leftrightarrow \quad \partial^2_{xx} f - \frac{1}{c^2} \partial^2_{tt} f = 0$

$\Leftrightarrow \quad \partial^2_{uu} g + \partial^2_{vv} g + 2\, \partial^2_{uv} g - \left(\partial^2_{uu} g - 2 \partial^2_{uv} g + \partial^2_{vv} g \right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\partial^2_{uv} g = 0}$

3) $G(u,v) = \partial_u g(u,v)$

$\partial^2_{uv} g = 0 \Leftrightarrow \partial_v G(u,v) = 0 \Leftrightarrow \exists\ a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 t.q. $G(u,v) = a(u)$.

4) $\partial_u \left(g(u,v) - A(u) \right) = G(u,v) - a(u) = 0$

$\Rightarrow \quad g(u,v) - A(u) = B(v)$, avec $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$\Rightarrow \quad g(u,v) = A(u) + B(v)$.

5) f sol. de $(E) \Rightarrow f(x,t) = g(x-ct, x+ct)$
$= A(x-ct) + B(x+ct)$.

Exercice 3

1) $$I_a = \iint_{[0,a]^2} g(x,y)\,dx\,dy = \iint_{[0,a]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a e^{-x^2}dx \cdot \int_0^a e^{-y^2}dy = \boxed{(F(a))^2.}$$

2) $$J_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$D_R = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, \ x^2+y^2\leq R^2\}$

Changement de coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow r^2 = x^2+y^2$

$(x,y)\in D_R \iff r\in[0,R], \quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

$$\Rightarrow J_R = \int_0^{\pi/2}\int_0^R e^{-r^2}\cdot \underbrace{r}_{|\det J(r,\theta)|}\,dr\,d\theta$$

$|\det J(r,\theta)|$, $J(r,\theta)$ = la matrice jacobienne de la transformation

$$J(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

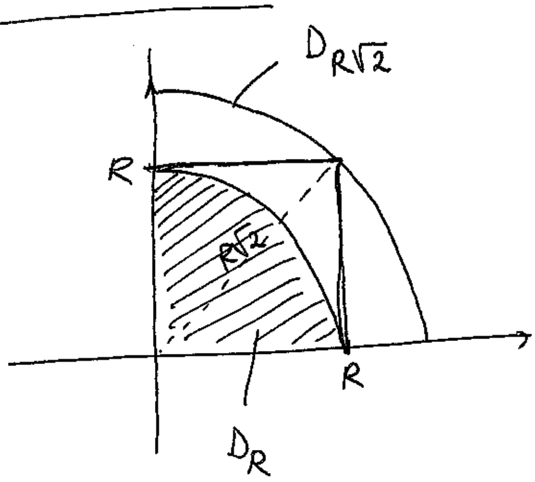
$$\Rightarrow \boxed{J_R} = \frac{\pi}{2}\times\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R = \boxed{\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)}$$

3) $D_R \subset [0,R]^2 \subset D_{R\sqrt{2}}$

et $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$

$$\Rightarrow \iint_{D_R} g \leq \iint_{[0,R]^2} g \leq \iint_{D_{R\sqrt{2}}} g$$

$$\Rightarrow \underline{J_R \leq I_R \leq J_{R\sqrt{2}}}.$$



4) De 3) on obtient

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) \leq \left(F(R)\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

En faisant $R \to \infty$ on obtient

$$\lim_{R\to\infty} \left(F(R)\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} F(R) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Exercice 4 $\quad f(x,y) = 2x^2+y^2-xy-7y.$

1) • 1ère étape : Trouver les points critiques,
i.e. (x,y) t.q. $\begin{cases} \partial_x f(x,y)=0 \\ \partial_y f(x,y)=0 \end{cases}$

$$\partial_x f(x,y) = 4x - y$$
$$\partial_y f(x,y) = 2y - x - 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-y=0 \\ 2y-x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x \\ 8x-x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Donc $(1,4)$ est le seul point critique.

• 2ème étape : Vérifier si $(1,4)$ est un vrai point d'extremum local et trouver sa nature (maximum/minimum)

Il faut calculer la matrice Hessienne $Hf(1,4)$

!!!
- si $Hf(1,4)$ positive définie $\Rightarrow$ minimum local
- si $Hf(1,4)$ négative définie $\Rightarrow$ maximum local
- si ni l'un, ni l'autre $\Rightarrow$ ce n'est pas un extremum local (point "selle")

$$Hf(1,4) = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f(1,4) & \partial^2_{xy} f(1,4) \\ \partial^2_{yx} f(1,4) & \partial^2_{yy} f(1,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On doit trouver le signe des valeurs propres de $Hf(1,4)$.

- on sait que $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(Hf) = 4 + 2 = 6$

  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(Hf) = 4 \cdot 2 - (-1)(-1) = 7$

  $\hookrightarrow$ $\boxed{\lambda_1, \lambda_2 > 0}$

- une autre façon : calculer explicitement λ_1, λ_2

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (4-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$; $\Delta = 36 - 28 = 8$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{> 0}$

$\hookrightarrow$ $Hf(1,4)$ est positive définie

$\Rightarrow$ $(1,4)$ est un minimum local.

2) $f(x,y) = f(1,4) + ((x,y) - (1,4)) \underbrace{\nabla f(1,4)}_{=0} +$

$$+ \frac{1}{2}(x-1, y-4)\, Hf(1,4) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix},$$

car le reste $= 0$ (toutes les dérivées partielles d'ordre ≥ 3 sont nulles)

donc $f(x,y) = -14 + \frac{1}{2}(x-1, y-4)\, Hf(1,4) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix}$.

$f(1,4) = -14$

3) Comme $Hf(1,4)$ positive définie $\Rightarrow (x-1, y-4)\, Hf(1,4) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix} \geq 0$ (par définition) $\forall x, y$

$\Rightarrow f(x,y) \geq \underbrace{-14}_{= f(1,4)}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $(1,4)$ est un point de minimum global pour f.