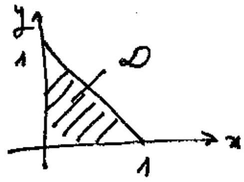
Correction Feuille de TD 3

2IC, 2012-2013

Exc. 1 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$



$$I = \iint_D (x+y)\, e^{-x} e^{-y}\, dx\, dy = 2 \iint_D x\, e^{-x} e^{-y}\, dx\, dy$$

par la symétrie des rôles de x et de y

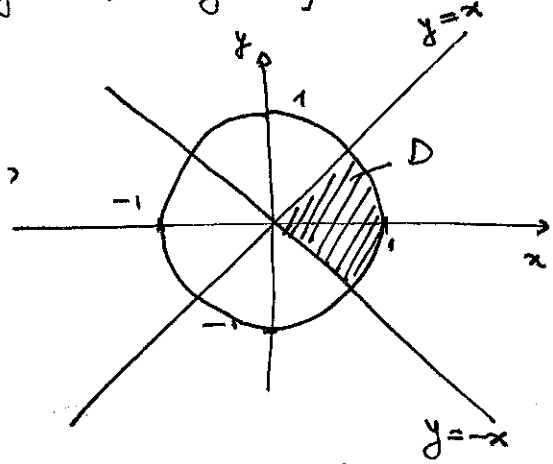
$$= 2\int_0^1 x e^{-x} \left(\int_0^{1-x} e^{-y}\, dy \right) dx$$

$$= 2\int_0^1 x e^{-x} \left(1 - e^{-(1-x)}\right) dx = 2\left[\int_0^1 x e^{-x}\, dx - \frac{1}{e}\int_0^1 x\, dx \right]$$

$$= 2\left[-\int_0^1 x \left(e^{-x}\right)' dx - \frac{1}{2e} \right] \overset{IPP}{=} 2\left[-\left[x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx - \frac{1}{2e} \right]$$

$$= 2\left(-\frac{1}{e} - \left[e^{-x}\right]_0^1 - \frac{1}{2e} \right) = 2\left(1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e}\right) = \boxed{2 - \frac{5}{e}} \quad (>0\,!)$$

Exc. 2 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ x+y > 0,\ x-y > 0\}$



1) $y > -x, \quad y < x, \quad x^2+y^2 < 1$

D est symétrique par rapport à l'axe Ox, car $(x,y) \in D$ ssi $(x,-y) \in D$.

2) $\text{Aire}(D) = \frac{1}{4} \cdot \text{Aire}(\text{Disque unité}) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

ou avec calcul d'intégrale :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy = \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 r\, dr = \frac{\pi}{4}.$$

chang. de coordonnées polaires

r : le jacobien en valeur absolue

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \text{avec } r \in \,]0,1[, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$$

$$\text{le jacobien} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

3) $$I_1 = \iint_D (x+y)\, dx\, dy = \iint_D x\, dx\, dy + \underbrace{\iint_D y\, dx\, dy}_{=\,0} = \iint_D x\, dx\, dy$$

0 car fct. impaire en y et D symétrique $/Ox$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^1 r^2\, dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{2}}$$

2

$$I_2 = \iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+r^2}\cdot r \, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr$$

chang. de coord. polaires

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 \frac{(1+r^2)'}{1+r^2}\,dr = \frac{\pi}{4}\left[\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi \ln 2}{4}}$$

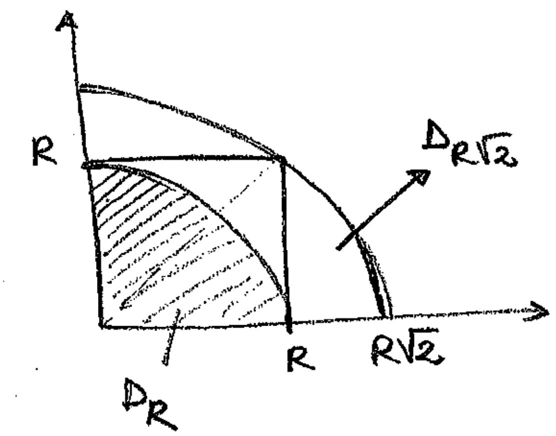
$\boxed{\text{Exercice 3}}$

1) $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2}\cdot r\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\cdot\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R = \boxed{\frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4}}$$

Chang. de coordonnées polaires :

$$\Psi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0,R], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



2) On a $D_R \subset K_R \subset D_{R\sqrt{2}}$

et $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$, $\forall\, x,y$

donc $\displaystyle\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq \int_{K_R}(\ldots) \leq \int_{D_{R\sqrt{2}}}(\ldots)$.

3) $$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^R\int_0^R e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy$$
$$= \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^R e^{-y^2}dy\right) = I_R^2,$$

où $I_R = \displaystyle\int_0^R e^{-t^2}\,dt$.

De l'inégalité de la question 2) + l'intégrale calculée en 1) :

$$\Rightarrow \frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} \leq I_R^2 \leq \frac{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \leq I_R \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}} \quad (\text{car } I_R \geq 0)$$

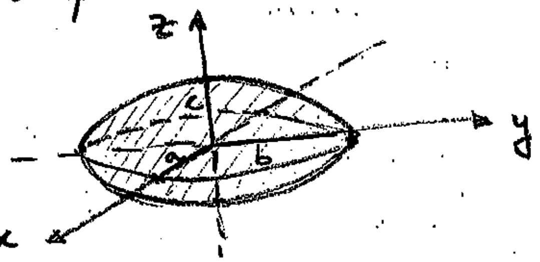
En faisant $R \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \lim_{R\to\infty} I_R = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

1) $V = \text{Vol}(D_1) = \int_{D_1} dx\,dy\,dz$, où $D_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$

↑ ellipsoïde



On fait le chang. de var.

$$\Psi : \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

Ψ est un chang. de variable de S sur D_1,

où $S = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$

la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (dans le cas $a = b = c = 1$)

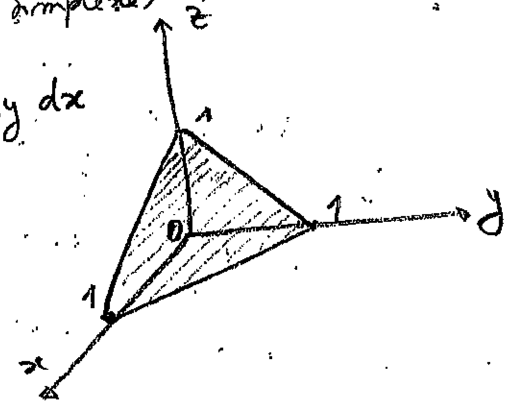
$$\det \Psi'(u,v,w) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc > 0.$$

$$\Rightarrow V = \int_{D_1} dx\,dy\,dz = \int_S abc\,du\,dv\,dw = abc \cdot \text{Volume}(S) = \boxed{\frac{4\pi}{3} \cdot abc}$$

[Le volume de la sphère de rayon R est $\frac{4\pi R^3}{3}$ (fait en cours)].

2) $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + z \leq 1\}$

tétraèdre (appelé simplexe)



$$\text{Vol}(D_2) = \int_{D_2} dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

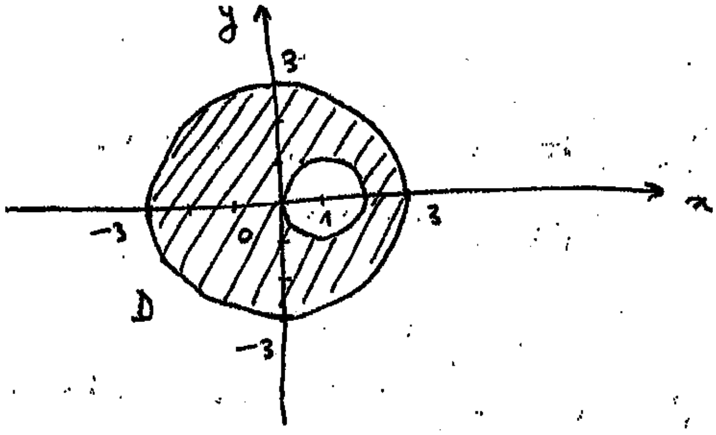
(qu'on peut retrouver aussi avec la formule du vol. d'un tétraèdre)

Exercice 5 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-9 < 0,\ (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$

1) $\forall \begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R}\end{smallmatrix}$, on a

$(x,y) \in D \Leftrightarrow (x,-y) \in D$

$\rightarrow$ L'axe des x est un axe de symétrie de D.



2) $x_G = \dfrac{\int_D x\, dx\, dy}{\int_D dx\, dy}$.

$D \cup C = \Omega$, où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$

disjoints $\qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-9 < 0\}$

$\rightarrow \int_D dx\,dy = \int_\Omega dx\,dy - \int_C dx\,dy = \text{Aire}(\Omega) - \text{Aire}(C)$
$= 9\pi - \pi = \boxed{8\pi}$

$\int_D x\,dx\,dy = \int_\Omega x\,dx\,dy - \int_C x\,dx\,dy$.

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < R^2\}$, avec $\underline{R=3}$

• Chang. de coordonnées polaires $\psi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\int_\Omega x\,dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^R r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)$

$= \dfrac{R^3}{3} \cdot [\sin\theta]_0^{2\pi} = \boxed{0}$

De même, avec le chang. de var. $\psi \begin{cases} x = u+1 \\ y = v \end{cases}$, $\det \psi'(u,v) = 1$

$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq 1\}$

$\int_C x\,dx\,dy = \int_A (u+1)\cdot du\,dv$, comme pour Ω ($R=1$)

$= \int_A u\,du\,dv + \int_A du\,dv = 0 + \text{Aire}(A) = \underline{\pi}$

$\hookrightarrow \int_D x\,dx\,dy = -\pi \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_G}} = \dfrac{-\pi}{8\pi} = \boxed{-\dfrac{1}{8}}$

À cause de la symétrie de D par rapport à l'axe des x, $\boxed{y_G = 0}$.

En effet, si on note $D^+ = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$

$D^- = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < 0\}$,

alors $\displaystyle\int_D y\,dx\,dy = \int_{D^+} y\,dx\,dy + \int_{D^-} y\,dx\,dy$.

Mais $\displaystyle\int_{D^-} y\,dx\,dy = -\int_{D^-} (-y)\,dx\,dy = -\int_{D^+} v\,du\,dv$

avec le chang. de var.

$\psi : \begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$, $|\det \psi'(u,v)| = |-1| = 1$.

$\psi(D^+) = D^-$

↳ $\displaystyle\int_D y\,dx\,dy = 0 \Rightarrow y_G = 0$.