$\boxed{\text{Exercice 6}}$

$u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $P_u = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T$.

1) $P_u^T = I_n^T - \frac{1}{\|U\|^2}(UU^T)^T = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T = P_u$

↳ P_u symétrique.

2) $D = \text{Vect}(u)$.

a) Soit $v \in D \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \lambda u$.

La matrice colonne de v dans $\mathcal{B}$ (la base canonique) est $V = \lambda U$.

La matrice colonne de $p_u(v)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u V = \lambda P_u U = \lambda\left(U - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T U\right) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

car $U^T U = \langle U, U \rangle = \|U\|^2$.

Donc $p_u(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

b) Soit $w \in D^\perp$ et W sa matrice colonne dans $\mathcal{B}$.

La matrice de $p_u(w)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u W = W - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T W = W,$$

car $U^T W = \langle U, W \rangle = 0$. $\begin{pmatrix} u \in D \\ w \in D^\perp \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_u(w) = w$.

c) p_u est la projection orthogonale sur $D^\perp$.

$\boxed{\text{Exercice 8}}$ $A_a = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2a & 6 & -3 \\ -6a & 3 & 2 \\ 3a & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1) A_a orthogonale $\Leftrightarrow$ ses colonnes forment une base orthonormée ($\langle C_i, C_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$ et $\|C_i\| = 1$, $\forall i$)

Dans notre cas on a $\begin{cases} \langle C_i, C_j \rangle = 0, & \forall i \neq j \in \{1,2,3\} \\ \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \end{cases}$

Il reste à avoir $\|C_1\| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}\sqrt{4a^2 + (-6a)^2 + 9a^2} = 1$

$\Leftrightarrow \underline{a^2 = 1} \Leftrightarrow \underline{a \in \{-1, 1\}}$.

2) $\boxed{a=1}$

A_1 est la matrice d'une rotation $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ orthogonale} \\ \det(A) = 1 \end{cases}$

$$A_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(A_1) = \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} \boxed{2} & 6 & -3 \\ 0 & 21 & -7 \\ 0 & -7 & \frac{21}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 21 & -7 \\ -7 & \frac{21}{2} \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

$\hookrightarrow$ A_1 est la matrice d'une rotation.

- A_1 matrice d'une <u>rotation autour d'un axe</u>

$\iff$ A_1 admet 1 comme valeur propre

$\iff \exists\ v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ t.q. $A_1 v = v$ (l'axe reste inchangé par la rotation)

$$A_1 v = v \iff (A_1 - I_3)\, v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 \\ -6x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$v = (x, y, z)^T$

$$\iff \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 & (L_1) \\ 14x \qquad\qquad = 0 & (3L_2 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$; On prend, par exemple, <u>$v = (0, 1, 2)$</u>.

$\Rightarrow$ A_1 est la matrice de la <u>rotation autour de l'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(0,1,2)$</u>.

/!\ $\exists$ une base B' de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de la même rotation est $A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

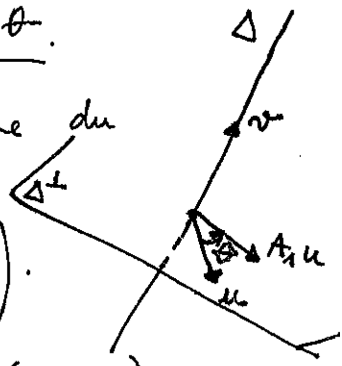
On veut trouver <u>l'angle θ</u>.

/!\ La trace d'une matrice est invariante par chang. de base

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A_1) \iff 1 + 2\cos\theta = \frac{11}{7} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{7}$.

$\Rightarrow \underbrace{\theta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$ ou $\underbrace{2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$.

- Pour décider, on doit trouver le <u>signe de $\sin\theta$</u>.



/!\ Le signe de $\sin\theta$ est le même que le signe du produit mixte $[u, A_1u, v]$, avec $u \in \Delta^\perp$.

<u>Soit $u = (1, 0, 0) \in \Delta^\perp$</u>. On a $A_1 u = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } [u, A_1u, v] = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}\frac{2}{7}\\-\frac{6}{7}\\\frac{3}{7}\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{6}{7} & 1 \\ \frac{3}{7} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(-12 - 3) = -\frac{15}{7}\ \boxed{< 0}\ !$$

$\Rightarrow$ <u>$\sin\theta < 0$</u> $\Rightarrow$ $\boxed{\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$.

ou $\theta = -\arccos\left(\frac{2}{7}\right)$