Correction feuille de TD 1

IC2, 2011-2012

Exercice 1

- $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \ ;\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 = \boxed{-8}.$$

- $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ \boxed{x+1 \quad x+1 \quad x+1} \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+1) \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (x+1) \cdot \begin{vmatrix} x+2 & x+1 & 2x+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3x+5 & 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} x+1 & 2x+2 \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} = -(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^2 \left(7x+12 - 2(2x+3)\right) = -(x+1)^2 (3x+6)$$

$$= \boxed{-3(x+1)^2(x+2)}.$$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)^2 = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1}.$$

$\Rightarrow$ $Sp(A) = \{$les valeurs propres$\} = \{-1, 1\}$

2) A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ • P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ (OK)
• $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$, $\forall \lambda$ valeur propre de A

l'espace propre associé à λ — la multiplicité de λ comme racine de P_A

• On a toujours $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$,
donc pour $\lambda = 1$, on a $m_1 = 1$, donc $\dim E_1 = 1 = m_1$. OK

• Il reste à vérifier que $\underline{\dim E_{-1} = 2}$ (car $m_{-1} = 2$).

$E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3) = \{ v \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

$E_{-1} = \{ v \in \mathbb{R}^3 : (A + I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

$v = (x, y, z)^T$

$$(A + I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

$\Rightarrow E_{-1} = \{ (x, y, x+y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,0,1)}_{\boxed{v}}, \underbrace{(0,1,1)}_{\boxed{w}}\big)$

$\Rightarrow \dim E_{-1} = 2 = m_1$ — pas colin. $\Rightarrow$ libre

$\hookrightarrow$ $\underline{A \text{ est diagonalisable}}$.

3) On sait que $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3$.

• On a déjà trouvé une base $\{v, w\}$ dans E_{-1}.

• $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$

$v = (x, y, z)^T$; $(A - I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z \Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,1,1)}_{\boxed{u}}\big)$

$\{u\}$ est une base de E_1 $\Rightarrow$ $\underline{\mathcal{B} = \{u, v, w\}}$ base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

La matrice semblable à A dans cette base :
$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Au & Av & Aw \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}$$
car $\begin{cases} Au = u \\ Av = -v \\ Aw = -w \end{cases}$

La relation entre A et Δ :

$$\Delta = P^{-1} A P,$$

avec $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$ la matrice de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\mathcal{B} = \{u, v, w\}$

(exc. à vérifier cette relation)

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$

1) • $f(a(x_1,x_2) + b(x_1',x_2'); (y_1,y_2)) = f((ax_1+bx_1', ax_2+bx_2'), (y_1,y_2))$

$\stackrel{\text{déf}}{=} (ax_1+bx_1')y_1 - (ax_2+bx_2')y_1 + 2(ax_2+bx_2')y_2$

$= a(x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2) + b(x_1'y_1 - x_2'y_1 + 2x_2'y_2)$

$= a f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + b f((x_1',x_2'),(y_1,y_2)).$

↳ f est linéaire par rapport à la première variable.

• on vérifie de la même façon que f est linéaire par rapport à la 2ème variable aussi, i.e.

$f((x_1,x_2); a(y_1,y_2) + b(y_1',y_2')) = a f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + b f((x_1,x_2),(y_1',y_2')).$

↳ f est une forme bilinéaire de $\mathbb{R}^2$.

Une autre façon de montrer la bilinéarité et en même temps de trouver la matrice A :

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2(-y_1+2y_2) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1+2y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ A}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(x,y) = x^T A y$,

et c'est facile de vérifier aussi la bilinéarité : — fait en cours

$$f(ax+bx',y) = (ax+bx')^T A y$$
$$= a\,x^T A y + b(x')^T A y$$
$$= a f(x,y) + b f(x',y).$$

pareil pour $f(x, ay+by')$ ...

2) $$A = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$f(e_i,e_j)$ est le coeff. de x_iy_j.

3) $$B = \text{Mat}(f, \{u_1,u_2\}) = \begin{pmatrix} f(u_1,u_1) & f(u_1,u_2) \\ f(u_2,u_1) & f(u_2,u_2) \end{pmatrix}$$ par définition

$$f(u_1,u_1) = f((1,0),(1,0)) = f(e_1,e_1) = 1$$
$$f(u_1,u_2) = f(e_1, e_1+e_2) = f(e_1,e_1) + f(e_1,e_2) = 1+0 = 1$$
$$f(u_2,u_1) = f(e_1+e_2, e_1) = f(e_1,e_1) + f(e_2,e_1) = 1+(-1) = 0$$
$$f(u_2,u_2) = f(e_1+e_2, e_1+e_2) = f(e_1,e_1) + f(e_1,e_2) + f(e_2,e_1) +$$
$$+ f(e_2,e_2) = 1+0+(-1)+2 = 2$$

[on pourrait aussi faire le calcul direct, en utilisant la définition de f]

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $v = X_1u_1 + X_2u_2$ et $w = Y_1u_1 + Y_2u_2$, alors $f(v,w) = X^TBY = X_1Y_1 + X_1Y_2 + 2X_2Y_2$.

4) On a $B = P^T A P$,

où $P = P_{\{e_i\},\{u_i\}} = \mathrm{Mat}(id ; \{u_i\}, \{e_i\}) = \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & \\ \left(\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\right. & \left.\boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right) & \begin{matrix}e_1\\e_2\end{matrix} \end{array}$

$u_1 = e_1$

$u_2 = e_1 + e_2$

$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^T A P = B$ effectivement.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ $\quad q(v) = x^2 - 2yz + xz.$

1) • vérifier que $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$

$$q(\lambda v) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda y)(\lambda z) + (\lambda x)(\lambda z) = \lambda^2 q(v) \quad (\text{OK})$$

• montrer que $f : f(u,v) = \frac{1}{4}\left[q(u+v) - q(u-v)\right]$ est une forme bilinéaire.

$u = (x, y, z)$, $\quad v = (x', y', z')$

$$\begin{aligned} q(u+v) &= (x+x')^2 - 2(y+y')(z+z') + (x+x')(z+z') \\ &= x^2 + (x')^2 + 2xx' - 2yz - 2yz' - 2y'z - 2y'z' \\ &\quad + xz + xz' + x'z + x'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(u-v) &= (x-x')^2 - 2(y-y')(z-z') + (x-x')(z-z') \\ &= x^2 + (x')^2 - 2xx' - 2yz + 2yz' + 2y'z - 2y'z' \\ &\quad + xz - xz' - x'z + x'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(u,v) &= \frac{1}{4}\left(4xx' - 4yz' - 4y'z + 2xz' + 2x'z\right) \\ &= xx' - yz' - y'z + \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2}x'z. \\ &= x\left(x' + \frac{1}{2}z'\right) + y(-z') + z\left(-y' + \frac{1}{2}x'\right) \\ &= u^T \cdot \begin{pmatrix} x' + \frac{1}{2}z' \\ -z' \\ \frac{1}{2}x' - y' \end{pmatrix} = u^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot v \end{aligned}$$

$f(u,v) = u^T A v$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

→ f forme bilinéaire ↳ q forme quadratique.
f est la forme polaire associée à q.

On remarque que • $q(v) = f(v,v) = v^T A v$.
• f peut s'obtenir à partir de q par dédoublement : $x^2 \to x x'$

$yz \to \frac{1}{2} y'z + \frac{1}{2} y z'$

$xz \to \frac{1}{2} x'z + \frac{1}{2} x z'$

2) $A = \left(f(e_i, e_j)\right)_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 - 4e_3$, $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} e_1 + e_3$. $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

a) $B = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \left(f(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\right)_{1 \leq i,j \leq 3}$

↗ calcul direct :

$f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = f(e_1, e_1) = 1$

$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f(e_1, 2e_1 + e_2 - 4e_3) = 2f(e_1, e_1) + f(e_1, e_2) - 4f(e_1, e_3) = 2 + 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$f(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = f(e_1, -\frac{1}{2} e_1 + e_3) = -\frac{1}{2} f(e_1, e_1) + f(e_1, e_3)$
$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

...

ou

↘ avec la formule de changement de base :

$B = P^T A P$, avec $P = P_{(e_i),(\varepsilon_i)} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array}$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Si $v = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$, alors

$$q(v) = (a, b, c)\, B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + 4b^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

b)

- q définie $\Leftrightarrow [\, q(v) = 0 \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^3} \,]$

  Pour $a = 0$, $b = 1$, $c = 4$ $(v = \varepsilon_2 + 4\varepsilon_3)$

  on a $q(v) = 0$, alors que $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

  $\Rightarrow$ <u>q n'est pas définie</u>.

- q positive $\Leftrightarrow q(v) \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$.

  On remarque que $q(\varepsilon_3) = f(\varepsilon_3, \varepsilon_3) = -\frac{1}{4} < 0$.

  $\hookrightarrow$ <u>q n'est pas positive</u>.

$\hookrightarrow$ f n'est pas un produit scalaire
(f n'est ni définie, ni positive).

Exercice 7

1) Expression de f et q

- $f(v,v') = v^TAv' = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z$

- $q(v) = f(v,v) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2(xy + xz + yz)$

2) Chang^{mt} base

notons $\tilde{A}$ la matrice de q dans la nouvelle base. On a
$$\tilde{A}_{ij} = v_i^T A v_j$$

- $Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^TAv_1 = 2 \; ; \; v_2^TAv_1 = 0 \; ; \; v_3^TAv_1 = 0$
- $Av_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2^TAv_2 = \frac{1}{2} \quad v_3^TAv_2 = 0$
- $Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3^TAv_3 = 1$

ainsi $\boxed{\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

dans cette base, si $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$
$q(v) = 2a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + a_3^2$

3) définie positive

Méthode 1 : les vp de $\tilde{A}$ sont toutes > 0
$\Leftrightarrow$ q définie positive
$\Leftrightarrow$ f produit scalaire

Méthode 2 : en écrivant $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$q(v) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Leftrightarrow v = 0$
et $\forall v \; q(v) \geq 0$
$\Rightarrow$ q déf pos.

4) $\mathcal{E}$ orthogonale ?

comme A la matrice de f ds $\mathcal{E}$ n'est pas diagonale,
$\mathcal{E}$ est non orthogonale
Méthode 1

Méthode 2 : $f(e_1, e_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}$ non orthogonale

5) base orthonormée

On a vérifié que $\mathcal{B}$ était orthogonale $(v_i^TAv_j = 0 \text{ si } i \neq j)$, il suffit de la normer $\mathcal{B}' = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|_f}, \frac{v_2}{\|v_2\|_f}, \frac{v_3}{\|v_3\|_f}\right)$ est orthonormale.
or $\|v_i\|_f = \sqrt{v_i^TAv_i}$ a été calculé.

$\boxed{\mathcal{B}' = \left(\frac{v_1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}v_2, v_3\right)}$ est f-orthonormale

6) Pythagore

Exercice 7 b

$f(v,v') = 2.1.0 + (-2)(1) + 2.0.(-1) + 1.1 + (-1).1 + (-2)(-1) = 0$

et $f(v,v) = v^T A v = v^T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$

$f(v',v') = v'^T A v' = v'^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$

$f(v+v', v+v') = (v+v')^T A (v+v') = (1 \; -1 \; -1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3$

on a bien $\boxed{\begin{array}{l} f(v,v') = 0 \\ f(v+v', v+v') = f(v,v) + f(v',v') \end{array}}$

] déterminer $F^\perp$

Méthode 1 : $F = vect(e_1, e_2) = vect(v_1, v_2)$ donc $F^\perp = vect(v_3)$

car v_1, v_2, v_3 est orthogonale

Méthode 2 : $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in F^\perp$ ssi $\begin{cases} f(v, e_1) = 0 \\ f(v, e_2) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) A e_1 = 0 \\ (x,y,z) A e_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ (x,y,z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow v \in vect \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8] matrice de $P_{F^\perp}$

Soit $v_3 = -e_2 + e_3$ alors $P_{F^\perp}(a) = f\left(a, \frac{v_3}{\|v_3\|_f}\right) \frac{v_3}{\|v_3\|_f}$

or $\|v_3\|_f = 1$ donc si $a = (x,y,z)$

$P_{F^\perp}(a) = (a^T A v_3) . v_3 = \left[a^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] v_3 = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ainsi la matrice de $P_{F^\perp}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
dans $\mathcal{E}$